

# Matematica e Fisica STPA TAAEC

## Secondo appello

### Matematica

Calcolare il prodotto  $C \equiv AB$ ,  $\det C$  e  $C^{-1}$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\det C = 3$$
$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x\pi/2)}{x-1}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2}.$$

— Risposte:

$$\ell_1 = -\frac{\pi}{2}$$
$$\ell_2 = 0$$

Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}, \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

— Risposte:

$$f'(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2},$$
$$g'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

Calcolare la primitiva  $k(x)$  di

$$k'(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

— Risposta:

$$k(x) = \ln(\sin(x))$$

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

— Risposte:

dominio:  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{derivata prima: } (1-x^2)/(1+x^2)^2$$

$$\text{punti stazionari: } x = -1, x = 1$$

$$\text{derivata seconda: } 2x(x^2-3)/(1+x^2)^3$$

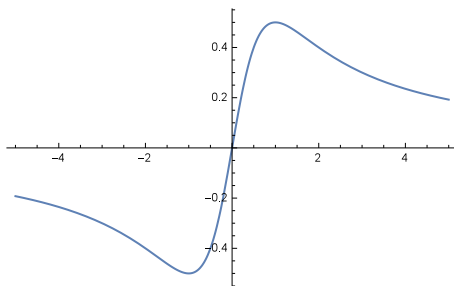
$$\text{massimi relativi: } x = 1, f = 1/2$$

$$\text{minimi relativi: } x = -1, f = -1/2$$

$$\text{massimo assoluto: } 1/2$$

$$\text{minimo assoluto: } -1/2$$

grafico:



## Fisica

Costante di Newton  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ . L'accelerazione gravitazionale terrestre è  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Una caloria = 4.184 J. La costante dei gas perfetti è  $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$ . Il calore di fusione del ghiaccio è  $K = 80 \text{ cal/gr}$ . Il calore specifico dell'acqua è  $C = 1 \text{ cal}/(\text{gr } ^{\circ}\text{K})$ . La densità dell'acqua è  $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$ . La velocità del suono è  $v_s = 340 \text{ m/s}$ . La velocità della luce è  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Lavorare nel sistema MKS, a meno che non sia specificato diversamente.

1. Una palla da tennis ha massa  $m = 60\text{g}$ . Viene sparata in verticale da una macchina alla velocità  $v$  di 30m/s. A quale altezza arriva?

Formula:  $h = v^2/(2g)$

Valore: 45 m

2. Quanto tempo  $t$  impiega per salire e ritornare a terra?

Formula:  $t = 2\sqrt{2h/g} = 2v/g$

Valore: 6 s

3. Se la macchina spara una palla al secondo ed ha un rendimento  $\eta = 30\%$ , quale potenza  $W$  consuma?

Formula:  $W = mv^2/(2\eta)$

Valore: 90 W

4. Una mole di gas perfetto si trova alla temperatura  $T$  di  $300K$  in un volume  $V = 2.5$  litri. Calcolare la sua pressione.

Formula:  $p = RT/V$

Valore:  $10^6$ Pascal  $\sim 10$ atm

5. Quanto lavoro  $L$  occorre fare per dimezzare il volume a temperatura costante?

Formula:  $L = -\int pdV = -RT \int dV/V = -RT \ln(V'/V) = RT \ln 2$

Valore: 1729J

6. E a pressione costante?

Formula:  $L = -\int pdV = -p \int dV = -p(V' - V) = pV/2 = RT/2$

Valore: 1247J

7. Marte ha diametro  $A = 6000$ km e si trova a una distanza  $d$  dalla terra pari a 200 milioni di km. Se lo osservo con una lente avente distanza focale  $f = 4$ m, a quale distanza dalla lente osservo l'immagine?

Formula:  $p = f$

Valore: 4m

8. Qual è il diametro  $B$  dell'immagine che osservo?

Formula:  $B = Af/d$

Valore: 0.12mm

9. Una bomba sprigiona un'energia pari a  $E = 250J$  e scoppia in due frammenti identici di massa  $m = 0.1$ kg. Calcolare la velocità dei frammenti.

Formula:  $v = \sqrt{E/m}$

Valore: 50 m/s