

Matematica e Fisica STPA TAAEC - Secondo appello

Matematica

1. Calcolare l'inversa e il quadrato della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + \frac{2}{x}}{4x + 4x^3 + 2x^2 + 2\sin(x)}$$

— Risposta:

$$\ell_1 = 2, \quad \ell_2 = \frac{3}{4},$$

3. Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = \ln(x) \sin(x), \quad g(x) = \sqrt{e^x + 1}.$$

— Risposte:

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x) \cos(x), \quad g'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

4. Calcolare la primitiva $g(x)$ di

$$g'(x) = \frac{6x}{1 + 3x^2}$$

— Risposta:

$$g(x) = \ln(1 + 3x^2) + C$$

5. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$$

per $x > 0$, rispondendo alle domande seguenti.

— Risposte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{derivata prima: } 3(x^2 - 1)/x^4$$

massimi e minimi locali: $x = 1$ minimo

dov'è crescente/descrescente? $x > 1$ e $x < 1$ rispettivamente

grafico:

Fisica

Accelerazione gravitazionale terrestre: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Costante dei gas perfetti: $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$. Densità dell'acqua: $\rho_{H_2O} = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1 \text{ kg/litro}$. Velocità del suono nell'aria: $v_s = 340 \text{ m/s}$. Lavorare nel sistema MKS, a meno che non sia specificato diversamente.

1a. Il carico di una gru, di massa $m = 15 \text{ kg}$, cade da fermo da un'altezza $h = 36 \text{ m}$. Trascurando l'attrito dell'aria, calcolare la sua energia E in Joule.

Formula: $E = K + U = mgh$

Valore: 5400 J

1b. Calcolare la velocità v con cui il carico si schianta a terra.

Formula: $v = \sqrt{2gh}$

Valore: 26.8 m/s

1c. Calcolare la velocità v' che ha carico nel momento in cui, durante la caduta, passa per $h' = 5 \text{ m}$.

Formula: $v' = \sqrt{2g(h - h')}$ [da $E = mv'^2/2 + mgh'$ conservata]

Valore: 24.9 m/s

2. Un tamburo viene colpito ed emette un suono di lunghezza d'onda $\lambda = 2 \text{ mm}$. Calcolare la frequenza f del suono e in quanto tempo t avviene una singola vibrazione del tamburo.

Formula: $f = v_s/\lambda$, $t = 1/f = \lambda/v_s$

Valore: $1.7 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, $5.9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

3a. Una mole di gas perfetto occupa un volume $V = 1 \text{ litro}$ a $T = 200^{\circ}\text{K}$. Calcolare la sua pressione in Pascal.

Formula: $P = RT/V$

Valore: $1.66 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

3b. Viene fatta una trasformazione adiabatica che riduce la pressione di un fattore 32 e la temperatura di un fattore 4. Calcolare il volume finale V' .

Formula: $V' = RT'/P' = 8RT/P = 8V$ [$P' = P/32$, $T' = T/4$]

Valore: 8 litri

3c. Si nota che nella trasformazione la quantità $P \cdot V^{5/3}$ è rimasta costante. Calcolare quanto sarebbe stata la pressione finale P' se fosse stato fatto lo stesso tipo di trasformazione, ma il volume fosse stato dimezzato.

Formula: $P' = P(V/V')^{5/3} = 2^{5/3}P$

Valore: $5.3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

4. Un parallelepipedo di polistirolo espanso di altezza $h = 6\text{cm}$ galleggia sull'acqua. Misurando la profondità h' della parte sommersa si trova $h' = 3\text{mm}$. Ricavare la densità ρ del polistirolo.

Formula: $\rho = \rho_{H_2O} h' / h$

Valore: $\rho = 0.05 \text{ kg/dm}^3$