

Matematica e Fisica STPA TAAEC

Terzo appello 2019

Matematica

Calcolare A^2 , $\det A$ e A^{-1} , dove

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 48 & -9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = 15 \quad A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^2)}{3x}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{-x^2} + 7x^4 + 3}{5x^4 + 2}.$$

— Risposte:

$$\ell_1 = \frac{2}{3} \quad \ell_2 = \frac{7}{5}$$

Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = \cos(e^{-x}), \quad g(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

— Risposte:

$$f'(x) = e^{-x} \sin(e^{-x}), \quad g'(x) = -e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$$

Calcolare la primitiva $k(x)$ di

$$k'(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{1+x}$$

— Risposta:

$$k(x) = \frac{x^7}{28} + \ln(1+x)$$

Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Determinarne il dominio e trovare dove è crescente e dove è decrescente.

Risposte: il dominio è $\mathbb{R}/\{1, 2\}$. La funzione cresce per $x < 3/2$ e decresce per $x > 3/2$ nel dominio.

Fisica

La costante dei gas perfetti è $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$. Il calore di fusione del ghiaccio è $K = 80 \text{ cal/gr}$. Lavorare nel sistema MKS.

1a. Una palla da bowling ha massa $m = 4\text{kg}$. La lunghezza della pista è $d = 18.3\text{m}$. La palla viene lanciata con velocità iniziale $v = 14\text{m/s}$. Trovare in quanto tempo t raggiunge i birilli, nel caso in cui l'attrito sia trascurabile.

Formula: $t = d/v$

Valore: 1.3s

1b. Ora invece si sa che nel rotolamento agisce una forza d'attrito che riduce l'energia cinetica ad un terzo del suo valore iniziale K . Calcolare la velocità v' dell'impatto coi birilli.

Formula: $K' = mv'^2/2 = K/3 = mv^2/6$, da cui $v' = v/\sqrt{3}$

Valore: 8.1m/s

1c. Quale energia E consuma il lanciatore per effettuare il lancio, sapendo che il suo corpo agisce a tutti gli effetti come un motore con rendimento $\eta = 40\%$?

Formula: $E = K/\eta = mv^2/(2\eta)$

Valore: 980J

2a. Una mole di gas perfetto si trova alla temperatura T di 300K in un volume $V = 10$ litri. Calcolare la sua pressione.

Formula: $p = RT/V$

Valore: $2.5 \cdot 10^5 \text{Pascal}$

2b. Il gas viene riscaldato fino a $T' = 400\text{K}$ a pressione costante e poi raffreddato fino a $T'' = 300\text{K} = T$ a volume costante. Calcolare la pressione finale p'' .

Formula: $p = RT/V = p' = RT'/V'$, da cui $V' = VT'/T = V'' = RT/p''$, da cui $p'' = RT^2/(VT')$

Valore: $1.9 \cdot 10^5 \text{Pascal}$

3a. Venere ha un diametro $h = 12000\text{km}$ e si trova a una distanza p dalla terra pari a 38 milioni di km. Se lo osservo con una lente biconvessa avente distanza focale $f = 2\text{m}$, a quale distanza q dalla lente osservo l'immagine?

Formula: $q = f$

Valore: 2m

3b. Qual è il diametro h' dell'immagine che osservo?

Formula: $h' = hf/p$

Valore: 0.6mm