

Matematica e Fisica STPA TAAEC - Secondo appello estivo

L'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 10 \text{ m/s}^2$. La costante dei gas perfetti è $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$. Il peso specifico dell'alluminio è $\rho_{Al} = 2.75 \text{ kg/dm}^3$, quello dell'acqua è $\rho_{H_2O} = 1 \text{ kg/dm}^3$. Il calore specifico dell'acqua è $C = 1 \text{ cal}/(\text{gr } ^{\circ}\text{K})$.

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare A^2 , l'inversa di A e il determinante di A

— Risposte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = 7$$

2. Calcolare il limite

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x - 1}$$

— Risposte:

$$\ell = 2$$

3. Calcolare la derivata prima di

$$f(x) = \sin(\ln(x)) + x^2 \sin(x)$$

— Risposta:

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} + x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

4. Calcolare la primitiva $g(x)$ di

$$g'(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

— Risposta:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x)$$

5. Calcolare le derivate prima e seconda di

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— Risposte: $y' = -2x/(x^2 + 1)^2$, $y'' = 2(3x^2 - 1)/(x^2 + 1)^3$

6. Dire dove la funzione è crescente e dove è decrescente

— Risposta: cresce per $x < 0$, decresce per $x > 0$

7. Individuarne i massimi e minimi relativi

— Risposta: ha un massimo relativo a $x = 0$

8. Una pallina di alluminio di raggio $r = 1\text{cm}$ cade in una piscina. Calcolare il peso P della pallina e la spinta S di Archimede in Newton.

Formule: $M = (4\pi/3)\rho_{Al}r^3$, $P = Mg = (4\pi/3)g\rho_{Al}r^3$, $S = (4\pi/3)g\rho_{H_2O}r^3$

Valori: $P = 0.12\text{N}$, $S = 0.04\text{N}$

9. Calcolare la forza F che agisce sulla pallina.

Formula: $F = P - S = (4\pi/3)g(\rho_{Al} - \rho_{H_2O})r^3$

Valore: 0.08N

10. Calcolare l'energia potenziale U della pallina, sapendo che la profondità della piscina è $h = 2.5\text{m}$.

Formula: $U = Fh = (4\pi/3)r^3gh(\rho_{Al} - \rho_{H_2O})$

Valore: 0.18J

11. Una vasca da bagno contiene $V_1 = 20$ litri di acqua calda alla temperatura T di 40°C . Di quanto scende la temperatura aggiungendo $V_2 = 2$ litri di acqua gelata (0°C)?

Formula: $T_f = V_1T/(V_1 + V_2)$, $\Delta T = V_2T/(V_1 + V_2)$

Valore: $\Delta T = 3.6^\circ\text{C}$

12. Calcolare il calore Q che si scambiano l'acqua calda e quella fredda per portare la temperatura all'equilibrio.

Formula: $Q = C\rho_{H_2O}V_1\Delta T = C\rho_{H_2O}V_1V_2T/(V_1 + V_2)$

Valore: 72kcal