

# Matematica e Fisica STPA TAAEC - Primo appello

## Matematica

1. Calcolare il determinante, l'inversa e il quadrato della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$\det A = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x) - 1}{x \sin(x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)e^{-x} + 3x^5 + 2}{4 + 3x^3 + 2x^5}$$

— Risposta:

$$\ell_1 = -8, \quad \ell_2 = \frac{3}{2},$$

3. Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = \cos(2\sqrt{x}), \quad g(x) = \sqrt{\ln x}.$$

— Risposte:

$$f'(x) = -\frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

4. Calcolare la primitiva  $g(x)$  di

$$g'(x) = x \cos(1 + x^2)$$

— Risposta:

$$g(x) = \frac{\sin(1 + x^2)}{2} + C$$

5. Studiare la funzione

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

per  $x > 0$ , rispondendo alle domande seguenti.

— Risposte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\text{derivata prima: } 2(x-1)/x^3$$

massimi e minimi locali:  $x = 1$  minimo

dov'è crescente/descrescente?  $x > 1$  e  $x < 1$  rispettivamente

grafico:

### Fisica

L'accelerazione gravitazionale terrestre è  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . La costante dei gas perfetti è  $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$ . Densità dell'acqua e del ghiaccio:  $\rho_{H_2O} = 1 \text{ kg/dm}^3$ . Una atmosfera =  $10^5 \text{ Pascal}$ . Una caloria =  $4.184 \text{ J}$ . Calore latente di fusione del ghiaccio:  $K = 80 \text{ cal/gr}$ . Calore specifico dell'acqua:  $C_{H_2O} = 1 \text{ cal}/(\text{gr } ^{\circ}\text{C})$ . Lavorare nel sistema MKS, a meno che non sia specificato diversamente.

1a. Una palla di massa  $m = 0.5 \text{ kg}$  viene lanciata verticalmente imprimendole un'energia  $E = 2.25 \text{ J}$ . Trascurando l'attrito dell'aria, calcolare a quale altezza massima  $h$  arriva.

Formula:  $h = E/(mg)$

Valore: 45cm

1b. Calcolare la velocità  $v'$  (in km/ora) che ha la palla nel momento in cui, durante il viaggio, passa per  $h' = 15 \text{ cm}$ .

Formula: da  $E = mv^2/2 + mgh = mv'^2/2 + mgh'$  abbiamo  $v' = \sqrt{4E/(3m)}$

Valore: 8.8km/ora

1c. Arrivata a terra, la palla rimbalza. Dopo il rimbalzo, raggiunge un'altezza massima  $h'' = 2/3h$ . Calcolare la frazione di energia  $(E - E'')/E$  persa (per attrito) nel rimbalzo.

Formula:  $(E - E'')/E = 1/3$  [da  $E'' = mgh''$ ,  $E = mgh$ ]

Valore: 33%

2a. Venere dista  $d = 38$  milioni di km dalla terra e ha diametro  $h = 12000 \text{ km}$ . Se lo osservo con una lente biconvessa vedo un'immagine di altezza  $h' = 0.2 \text{ mm}$ . A quale distanza  $d'$  dalla lente si forma l'immagine in cm?

Formula:  $d' = dh'/h$

Valore: 63cm

2b. Quanto vale la distanza focale  $f$  della lente?

Formula:  $f = d' = dh'/h$

Valore: 63cm

3a. Calcolare il volume in litri di una mole di gas perfetto che si trova a temperatura ambiente ( $T = 300^{\circ}\text{K}$ ) e a pressione ambiente ( $P = 1 \text{ atm}$ ).

Formula:  $V = RT/P$

Valore: 25litri

3b. Viene fatta una trasformazione adiabatica nella quale  $P^3V^5 = \text{costante}$  fino a comprimere il gas al volume finale  $V' = V/8$ . Calcolare la temperatura finale  $T'$ .

Formula:  $T' = P'V'/R = 4T$  [ $P^3V^5 = P'^3V'^5$  implica  $P' = 32P$ ]

Valore:  $1200^\circ K$

4. Sul pianeta stanno  $M = 1.400$  miliardi di chilometri cubi d'acqua. Quanto ghiaccio  $m$  si deve sciogliere per innalzare la temperatura dell'acqua di  $1^\circ C$ ?

Formula:  $m = C_{H_2O}M\Delta T/K = M/80$  [da  $Q = C_{H_2O}M\Delta T = Km$ ]

Valore: 17.5 miliardi di chilometri cubi