

Mat/Fis STPA/TAAEC - Appello straordinario - Novembre
2018

Matematica

Calcolare l'inversa, il determinante e il quadrato della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 40 & 14 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\ln(1 - x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x^3 + 1}{7 + 5x^3 + x}.$$

— Risposta:

$$\ell_1 = 2, \quad \ell_2 = \frac{4}{5}$$

Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{\cos(x)}$$

— Risposte:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} + \ln(x) \sin(x) \right)$$

Calcolare la primitiva $g(x)$ di

$$g'(x) = x^2 e^{x^3}$$

— Risposta:

$$g(x) = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Calcolare la derivata prima di

$$y = xe^x.$$

— Risposta: $y' = e^x(x + 1)$

Dire dove la funzione è crescente e dove è decrescente

— Risposta: cresce per $x > -1$, decresce per $x < -1$

Individuarne i massimi e minimi relativi

— Risposta: ha un minimo relativo a $x = -1$

Disegnarne il grafico

Fisica

Costante di Newton $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. L'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 10 \text{ m/s}^2$. Una caloria = 4.184 J. La costante dei gas perfetti è $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$. la densità dell'acqua è $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1\text{kg/litro}$. Lavorare nel sistema MKS, a meno che non sia specificato diversamente.

1. Una pompa ha una potenza W pari a 15kW . Quanto tempo impiega a riempire una vasca di $V = 1800$ litri d'acqua posta ad un'altezza h di 30m ?

Formula: $t = \rho_{\text{H}_2\text{O}} V g h / W$

Valore: 36s

2a. Una massa $m = 600\text{kg}$ cade da un'altezza h di 20 metri. Quanto vale l'energia potenziale perduta U ?

Formula: $U = m g h$

Valore: 120kJ

2b. All'inizio della caduta la velocità della massa m è $v_1 = 36\text{km/ora}$. Quanto vale la sua energia cinetica K_1 ?

Formula: $K_1 = m v_1^2 / 2$

Valore: 30kJ

2c Qual'è la velocità v_2 con cui la massa si schianta a terra?

Formula: $v_2 = \sqrt{2(U + K_1)/m}$ [da $U = K_2 - K_1 = m v_2^2 / 2 - K_1$]

Valore: $22.4\text{m/s} = 80.5 \text{ km/ora}$

3. Trovare quale percentuale p del volume totale V di un iceberg è immersa nell'acqua, sapendo che la densità del ghiaccio è $\rho_{\text{gh}} = 0.9\text{kg/litro}$.

Formula: $p = V_{\text{imm}}/V = \rho_{\text{gh}}/\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ [da $F = \rho_{\text{gh}} V g = S = \rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{imm}} g$]

Valore: 90%

4a. Una macchina termica lavora con un gas perfetto secondo il ciclo di Carnot, con rendimento $\eta = 40\%$. Calcolare la temperatura T_1 della sorgente fredda, sapendo che quella calda è $T_2 = 300^{\circ}\text{K}$.

Formula: $T_1 = T_2(1 - \eta)$

Valore: 180°K

4b. Il rapporto $V_{\text{max}}/V_{\text{min}}$ tra il volume massimo e quello minimo lungo il ciclo vale 2. Calcolare il rapporto tra la pressione massima e quella minima.

Formula: $p_{\text{max}}/p_{\text{min}} = (T_2/T_1)(V_{\text{max}}/V_{\text{min}})$ [da $p_{\text{max}} V_{\text{min}} = n R T_2$, $p_{\text{min}} V_{\text{max}} = n R T_1$]

Valore: 3.3

5a. Una lente biconvessa ha $D = 2.5$ diottrie. Calcolare quante volte viene ingrandito un oggetto posto a distanza $p = 50\text{cm}$.

Formula: $G = 1/(Dp - 1)$ [da $D = 1/f$ con f in metri]

Valore: 4 volte

5b. A quale distanza q si forma l'immagine?

Formula: $q = pG$

Valore: 2m