

Matematica e Fisica STPA TAAEC - Secondo appello estivo

L'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 10 \text{ m/s}^2$. La costante dei gas perfetti è $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$.

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

calcolare il prodotto AB , l'inversa di A e il determinante di B

— Risposte:

$$AB = \begin{pmatrix} 16 & -14 \\ -11 & 13 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det B = 18$$

2. Calcolare il limite

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x^2)}{7x^2 e^x}$$

— Risposta:

$$\ell = \frac{1}{7},$$

3. Calcolare la derivata prima di

$$f(x) = \ln(\ln(x)) + \frac{\sin(x^2)}{x}$$

— Risposta:

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} + 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

4. Calcolare la primitiva $g(x)$ di

$$g'(x) = \frac{3}{x^2} + 2x \cos(x^2)$$

— Risposta:

$$g(x) = -\frac{3}{x} + \sin(x^2)$$

5. Calcolare le derivate prima e seconda di

$$y = xe^{-x}.$$

— Risposte: $y' = (1 - x)e^{-x}$, $y'' = (x - 2)e^{-x}$

6. Dire dove la funzione è crescente e dove è decrescente

— Risposta: decresce per $x > 1$, cresce per $x < 1$

7. Individuarne i massimi e minimi relativi

— Risposta: ha un massimo relativo a $x = 1$

8. In $t =$ un'ora un facchino trasporta $m = 60$ kg al terzo piano di un palazzo (altezza $h = 9$ m) facendo 10 viaggi. Quale potenza media W richiede questo lavoro?

Formule: $W = mgh/t$

Valore: 1.5 Watt

9. La massa della luna è $m_L = 7 \times 10^{22}$ kg, quella della terra è $m_T = 6 \times 10^{24}$ kg. La loro distanza è $d = 384000$ km. Calcolare a quale distanza r dalla terra un asteroide di passaggio di massa M sente una forza gravitazionale totale nulla.

Formula: $Gm_L M/r^2 = Gm_T M/(d-r)^2$, $r = d/(1 + \sqrt{m_T/m_L})$

Valore: 41236 km

10. Due moli di gas perfetto sono contenute in un recipiente del volume V pari a un litro. Qual'è la loro pressione p a temperatura $T = 2^\circ K$?

Formula: $p = nRT/V$

Valore: 33000 Pascal

11. Che lavoro L fa il sistema se riscaldo il gas a pressione costante fino a portarlo a $T' = 4^\circ K$?

Formula: $V' = 2V$, $L = p(V' - V) = nRT$

Valore: 33 J

12. Un tubo lungo $d = 10m$ ha sezioni S_1 e $S_2 = 3S_1$ alle due estremità ed è riempito di un fluido incompressibile. Voglio esercitare una forza $F_2 = 70N$ tramite il pistone che sta all'estremità 2. Quale forza F_1 devo esercitare sul pistone che si trova all'altra estremità per ottenere questo risultato?

Formula: $F_1 = F_2 S_1/S_2$

Valore: 23.3 N