2.4. Due sassi lanciati

Esercizio 25. Un sasso viene lasciato cadere liberamente con velocità iniziale nulla. Dopo un tempo $\bar{t}$ un altro sasso viene lanciato dallo stesso punto con velocità iniziale $\overline{v}$. Per quali valori di $\overline{v}$ il secondo sasso colpisce il primo?

Il primo sasso segue un moto uniformemente accelerato, con accelerazione $-g$. Possiamo scegliere il riferimento in modo che lo spostamento iniziale sia nullo, e dato che anche la velocità iniziale è nulla la legge oraria sarà

$$s_1 = -\frac{1}{2}gt^2$$

Anche per il secondo sasso abbiamo un moto uniformemente accelerato, partiamo quindi dalla legge oraria generale

$$s_2 = s_{2,0} + v_{2,0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

e

$$v_2 = v_{2,0} - gt$$

Imponiamo adesso che lo spostamento a $t = \bar{t}$ sia nullo, e la velocità allo stesso istante sia $\overline{v}$. Abbiamo le due condizioni

$$\begin{aligned} 0 &= s_{2,0} + v_{2,0}\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \\ \overline{v} &= v_{2,0} - g\bar{t} \end{aligned}$$

che ci permettono di ricavare i coefficienti incogniti:

$$\begin{aligned} v_{2,0} &= \overline{v} + g\bar{t} \\ s_{2,0} &= -\left(\overline{v} + g\bar{t}\right)\bar{t} + \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \end{aligned}$$

e sostituendo troviamo la legge oraria

$$\begin{aligned} s_2 &= -\left(\overline{v} + g\bar{t}\right)\bar{t} + \frac{1}{2}g\bar{t}^2 + \left(\overline{v} + g\bar{t}\right)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= -\left(\overline{v}\bar{t} + \frac{1}{2}g\bar{t}^2\right) + \left(\overline{v} + g\bar{t}\right)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Notare che con semplici passaggi algebrici è possibile scrivere questa relazione nella forma

$$s_2 = \overline{v}\left(t - \bar{t}\right) - \frac{1}{2}g\left(t - \bar{t}\right)^2$$

Troviamo adesso, se esiste, l'istante nel quale $s_1 = s_2$. Abbiamo

$$-\frac{1}{2}gt^2 = -\left(\overline{v}\bar{t} + \frac{1}{2}g\bar{t}^2\right) + \left(\overline{v} + g\bar{t}\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$

e vediamo che i termini di secondo grado nel tempo si cancellano. Quindi l'urto avviene al tempo

$$t_u = \frac{\overline{v}\bar{t} + \frac{1}{2}g\bar{t}^2}{\overline{v} + g\bar{t}} \tag{2.4.1}$$

Affinchè la soluzione sia accettabile deve essere $t_u > \bar{t}$, quindi

$$-\frac{1}{2}\frac{g\bar{t}^2}{\overline{v} + g\bar{t}} > 0$$

e di conseguenza

$$\overline{v} < -g\bar{t}$$

La velocità con cui deve essere lanciato il secondo sasso deve quindi essere rivolta verso il basso, e maggiore in modulo del modulo della velocità posseduta in quell'istante dal primo.

Esercizio 26. Rappresentare graficamente la velocità dei due sassi in funzione del tempo, e interpretare il risultato precedente.

Il grafico è riportato in Figura 2.5.

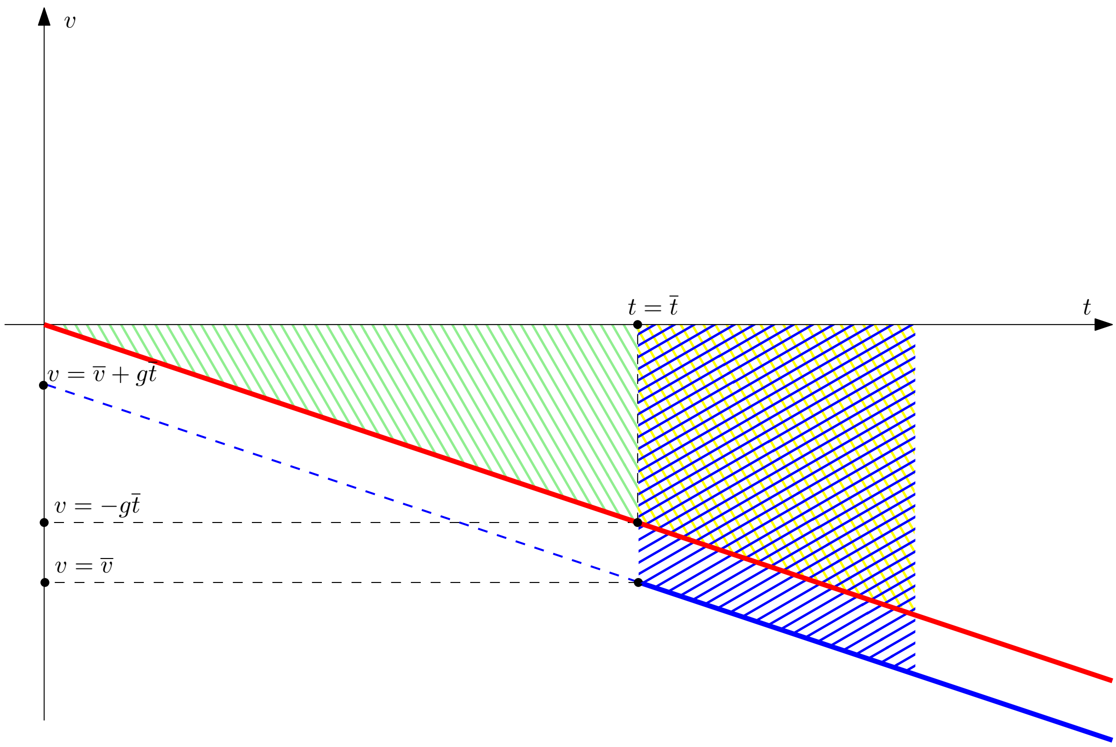

Figura 2.5.: Interpretazione grafica della soluzione del problema. In rosso la velocità del primo sasso, in blu quella del secondo.

La velocità del primo sasso è rappresentata in funzione del tempo in colore rosso. Al tempo $\bar{t}$ il primo sasso avrà percorso uno spazio dato dall'area della regione triangolare colorata di verde. Da quel momento il secondo sasso inizierà a cadere: la sua velocità è rappresentata in colore blu. Quindi da $\bar{t}$ in poi allo spazio percorso inizialmente dal primo sasso se ne aggiunge altro dato dall'area del trapezio colorata di giallo. Invece lo spazio percorso dal secondo sasso sarà l'area del trapezio tratteggiata di blu. Chiaramente per raggiungere il primo sasso il secondo deve recuparare lo svantaggio iniziale (l'area verde). Questo è possibile solo se l'area del trapezio blu è maggiore di quella del trapezio giallo, e quindi la velocità $v_2(\bar{t})$ dovrà essere maggiore (in modulo) di $v_2(\bar{t})$, come rappresentato in Figura 2.5. L'urto avverrà quando l'area del parallelogramma differenza tra il trapezio blu e quello giallo sarà uguale all'area del triangolo iniziale:

$$\left(-g\bar{t} - \overline{v}\right)\left(t_u - \bar{t}\right) = \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

da cui la soluzione (2.4.1).

cc BY NC SA