2.3. Profondità di un pozzo

Per determinare la profondità di un pozzo si lancia un sasso al suo interno, e si misura il tempo τ dopo il quale si sente il suono dell'urto sul fondo. Nel seguito si indicherà con c_s la velocità del suono e si trascurerà l'attrito dell'aria.

Esercizio 21. Sulla base di considerazioni dimensionali dire come la profondità h del pozzo può dipendere dai parametri del problema.

I parametri del problema e le loro dimensionalità sono indicate come segue:

$$\begin{aligned}
[h] &= L \\
[g] &= LT^{-2} \\
[c_s] &= LT^{-1} \\
[\tau] &= T
\end{aligned}$$

Con gli ultimi tre è possibile ottenere l'unica combinazione adimensionale indipendente

$$\Pi_1 = \frac{c_s}{g\tau}$$

per cui potremo scrivere

$$h = c_s\tau\,\Phi\left(\frac{c_s}{g\tau}\right)$$

Esercizio 22. Determinare esplicitamente h.

Il tempo τ è dato dalla somma del tempo di caduta τ_c per il sasso e del tempo impiegato dal suono τ_s per tornare all'osservatore. La caduta avviene, trascurando gli attriti, con moto uniformemente accelerato quindi

$$h = \frac{1}{2}g\tau_c^2$$

cioè .

$$\tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il suono si muove con velocità costante, quindi

$$\tau_s = \frac{h}{c_s}\,.$$

Il tempo misurato sarà dunque

$$\tau = \tau_c + \tau_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c_s}$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\sqrt{h}$

$$h+\sqrt{\frac{2c_s^2}{g}}\sqrt{h}-c_s\tau=0$$

che ammette come unica soluzione accettabile (perché positiva)

$$h=\left(\sqrt{\frac{c_s^2}{2g}+c_s\tau}-\sqrt{\frac{c_s^2}{2g}}\right)^2 \tag{2.3.1}$$

Esercizio 23. Mostrare che il risultato precedente per h è in accordo con quanto previsto dall'analisi dimensionale, e discutere il limite $\Pi_1 \ll 1$ e $\Pi_1 \gg 1$.

Raccogliendo dal risultato (2.3.1) il fattore $c_s\tau$ troviamo

$$\begin{aligned} h &= c_s\tau\left(\sqrt{\frac{c_s}{2g\tau}+1}-\sqrt{\frac{c_s}{2g\tau}}\right)^2 \\ &= c_s\tau\Phi\left(\frac{c_s}{g\tau}\right) \end{aligned}$$

in accordo con quanto previsto, con

$$\Phi\left(\Pi_1\right)=\left(\sqrt{\frac{\Pi_1}{2}+1}-\sqrt{\frac{\Pi_1}{2}}\right)^2$$

Vogliamo adesso studiare alcuni casi limite, in particolare quello di "pozzo profondo" e "pozzo poco profondo". Prima di tutto è necessario definire in maniera precisa cosa intendiamo con queste parole: come sappiamo, per farlo ci serve una quantità delle dimensioni di una lunghezza da confrontare con h. Dal momento che τ è il risultato di una misura, e quindi non aggiunge niente di nuovo alla caratterizzazione del pozzo, vogliamo costruire questa quantità utilizzando i soli parametri c_s e g. Si vede subito che l'unica possibilità, a meno di una costante moltiplicativa, è

$$\frac{c_s^2}{g}$$

che è proporzionale alla profondità h^* del pozzo alla quale la velocità del sasso diviene uguale alla velocità del suono. Infatti questo accade quando

$$gt=c_s$$

ma in quell'istante lo spazio percorso è

$$h^*=\frac{1}{2}gt^2$$

e quindi

$$h^* = \frac{1}{2}\frac{c_s^2}{g}$$

Per studiare i due casi limite scriviamo nuovamente il tempo misurato nella forma

$$c_s\tau = \sqrt{\frac{2c_s^2 h}{g}} + h = h\left(1 + 2\sqrt{\frac{h^*}{h}}\right)$$

Possiamo adesso considerare agevolmente il caso di posso profondo: qui $h \gg h^*$e possiamo trascurare il secondo termine tra parentesi rispetto al primo, ottenendo

$$h \simeq c_s\tau$$

Possiamo interpretare questo risultato osservando che il moto di caduta del sasso è accelerato, quindi la velocità media di caduta diviene molto grande se il pozzo è profondo in confronto della velocità del suono, che invece è costante. Quindi il tempo τ diviene dominato dalla velocità di risalita del suono.

Nel caso di un pozzo poco profondo abbiamo invece $h \ll h^*$. In questo caso il secondo termine tra parentesi diviene molto più grande del primo, e quindi

$$c_s\tau \simeq 2h\sqrt{\frac{h^*}{h}} = 2\sqrt{hh^*} = \sqrt{h\frac{2c_s^2}{g}}$$

e quindi

$$h \simeq \frac{1}{2}g\tau^2$$

In questo caso il tempo τ è dominato dal tempo di caduta: il sasso parte da fermo e per un pozzo poco profondo la sua velocità resta piccola rispetto a quella del suono.

Esercizio 24. Ritrovare il risultato precedente considerando l'approssimazione di "grande τ" e di "piccolo τ".

Ci aspettiamo che il limite di "grande τ" corrisponda al pozzo profondo, e viceversa. Dall'espressione esatta

$$h = c_s\tau\left(\sqrt{\frac{c_s}{2g\tau} + 1} - \sqrt{\frac{c_s}{2g\tau}}\right)^2$$

ottenuta precedentemente vediamo che è naturale confrontare τ con c_s/g, che non è altro che il tempo al quale la velocità del sasso diviene uguale a quella del suono. "Grandi valori di τ" significa quindi

$$\frac{c_s}{g\tau} \ll 1$$

e l'espressione precedente diviene approssimativamente

$$h \simeq c_s\tau$$

Per piccoli valori di τ abbiamo

$$\frac{g\tau}{c_s} \ll 1$$

e conviene scrivere la formula precedente nella forma equivalente

$$\begin{aligned} h &= \frac{c_s^2}{2g}\left(\sqrt{1+\frac{2g\tau}{c_s}}-1\right)^2 \\ &= \frac{c_s^2}{2g}\left(\frac{\frac{2g\tau}{c_s}}{\sqrt{1+\frac{2g\tau}{c_s}}+1}\right)^2 \end{aligned}$$

Nel limite considerato possiamo porre il denominatore della frazione uguale a 2, e quindi

$$h \simeq \frac{c_s^2}{2g}\left(\frac{g\tau}{c_s}\right)^2 = \frac{g\tau^2}{2}$$