2.1. Rappresentazioni grafiche delle leggi orarie

Esercizio 12. Rappresentare graficamente la velocità di un moto uniforme in funzione del tempo, e dedurne il grafico dello spazio percorso.

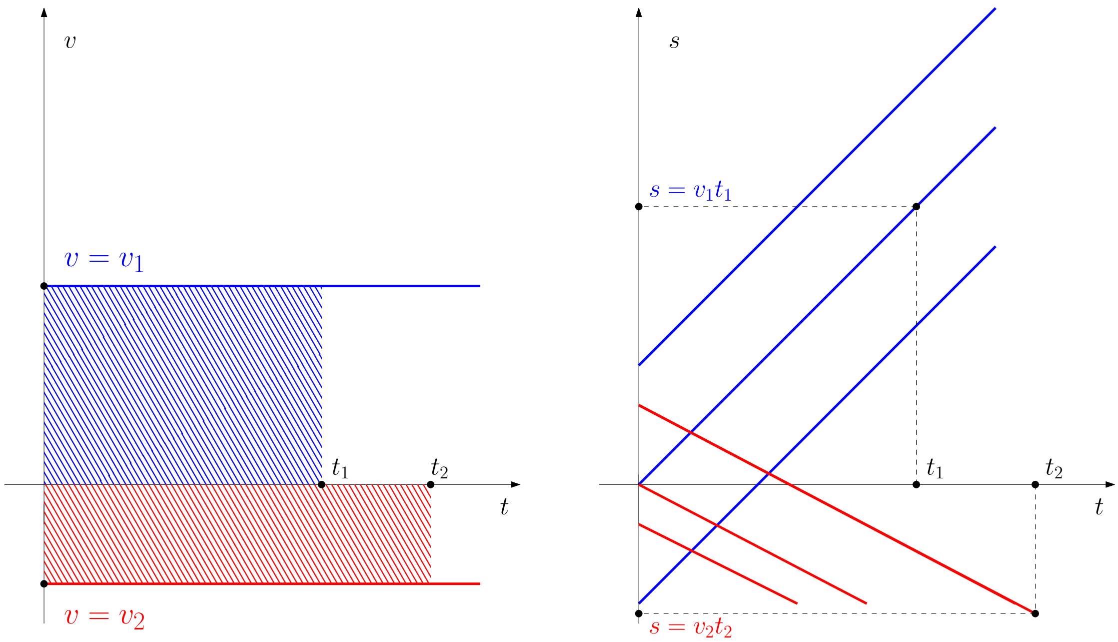

Figura 2.1.: Relazione tra grafico della velocità e grafico dello spazio percorso, per un moto uniforme.

Il grafico a sinistra in Figura 2.1 rappresenta due possibile moti a velocità costante: dato che le velocità non cambiano nel tempo abbiamo delle rette orizzontali, corrispondenti a una velocità positiva (blu) e a una velocità negativa (rosso). La relazione tra la variazione dello spazio e l'intervallo di tempo è

$$\Delta s = \overline{v} \Delta t$$

dove $\overline{v}$ è la velocità media, che in questo caso coincide con la velocità istantanea dato che questa è costante. Per il grafico blu abbiamo che la variazione della posizione al generico tempo t rispetto al tempo iniziale vale

$$\Delta s = v_1 \Delta t = v_1 (t - 0) = v_1 t$$

Notare che questa è l'area tratteggiata in blu (prendendo $t = t_1$). Quindi lo spazio percorso aumenta linearmente col tempo. Lo spostamento totale si otterrà aggiungendo all'espressione precedente lo spazio percorso a $t = 0$:

$$s = \Delta s + s_0$$

ma l'informazione su s_0 non è contenuta nella legge della velocità, e può essere scelto arbitrariamente. Per una determinata scelta della velocità, esistono infiniti moti possibili: alcuni sono rappresentati nel grafico a destra: si tratta sempre di leggi lineari (in blu). L'intersezione tra le rette che corrispondono alle leggi orarie e l'asse $t = 0$ corrisponde al valore di s_0 scelto.

Nei grafici sono rappresentate leggi analoghe per il moto a velocità negativa (in rosso).

Esercizio 13. Rappresentare graficamente l'accelerazione di un moto uniformemente accelerato in funzione del tempo, e dedurne il grafico della velocità.

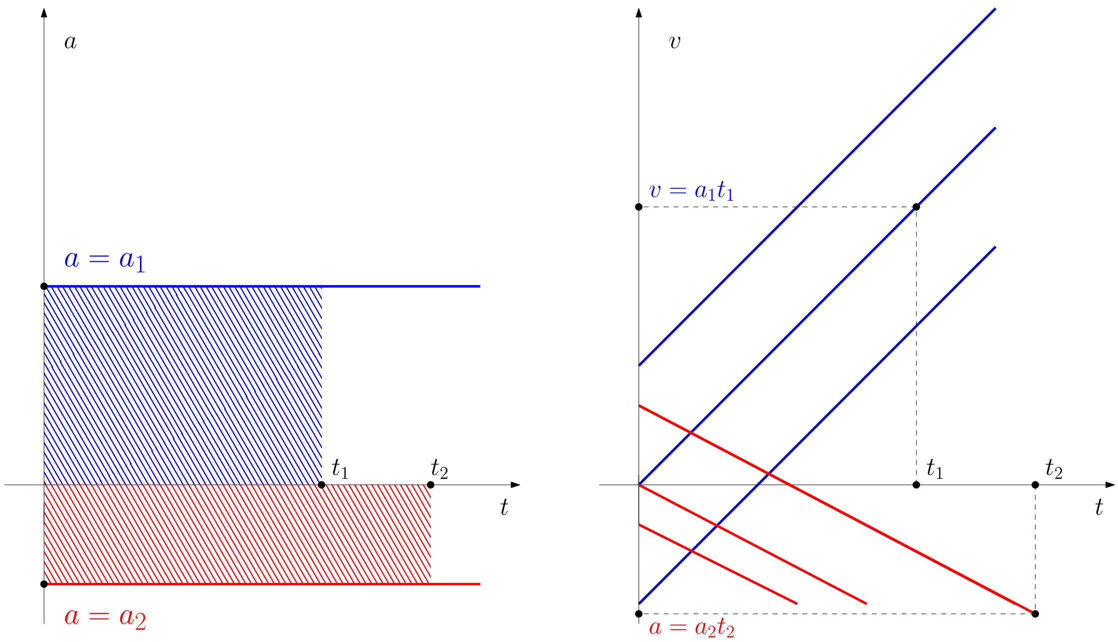

Figura 2.2.: Relazione tra grafico della velocità e grafico dello spazio percorso, per un moto uniforme.

La rappresentazione grafica è riportata in Figura 2.2. Una volta osservato che il legame tra variazione di velocità e accelerazione media è

$$\Delta v = a \Delta t$$

si può discutere il problema in perfetta analogia con quello precedente.

Esercizio 14. Dal grafico della velocità di un moto uniformemente accelerato ricavato nel precedente esercizio, ricavare il grafico dello spazio percorso.

Esercizio 15. Rappresentare la velocità in funzione dello spazio percorso, per un moto uniformemente accelerato.

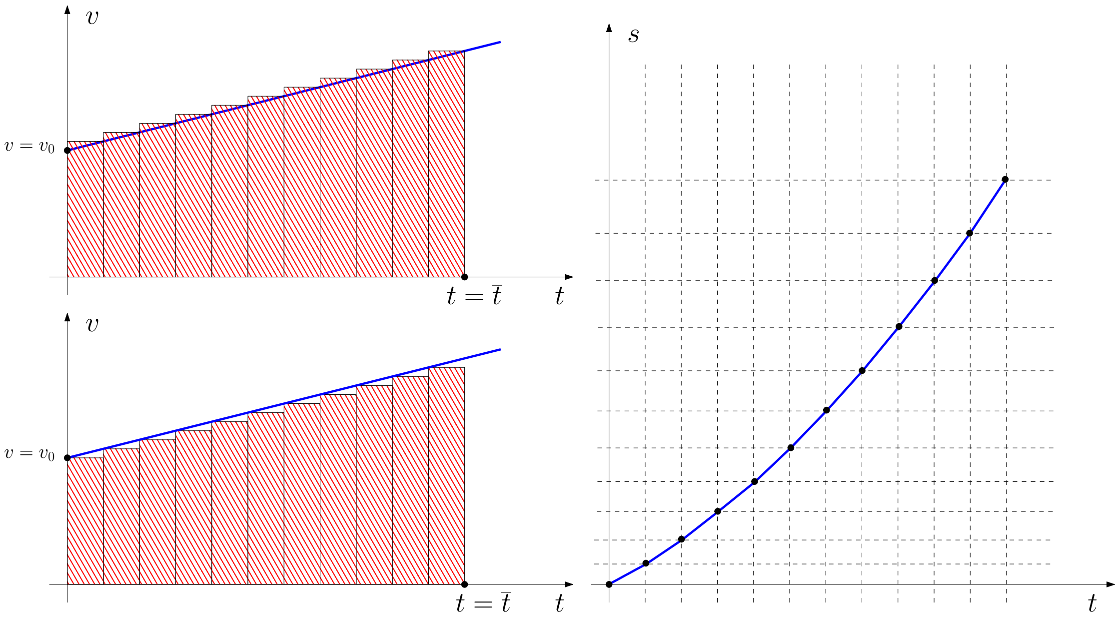

Figura 2.3.: Relazione tra grafico della velocità e grafico dello spazio percorso, per un moto uniforme.

Possiamo prendere come punto di partenza la legge

$$\Delta s = \overline{v}\Delta t$$

come abbiamo fatto in precedenza. Occorre tenere presente che in questo caso la velocità non è costante. Preso un intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$ avremo però in tale intervallo (considerando per fissare le idee $a > 0$)

$$v(t) < \overline{v} < v(t + \Delta t)$$

e quindi

$$v(t)\Delta t < \Delta s < v\left(t + \Delta t\right) \tag{2.1.1}$$

Se dividiamo adesso l'intervallo $[0, t]$ in N parti di lunghezza $\Delta t = t/N$ potremo approssimare per eccesso lo spostamento totale come

$$\Delta s_{tot}^{(+)} = \sum_{k=0}^{N-1} v\left(k\Delta t + \Delta t\right)\Delta t$$

ma sappiamo che $v = v_0 + at$ e quindi

$$\begin{aligned}\Delta s_{tot}^{(+)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[v_0 + a\left(k\Delta t + \Delta t\right)\right]\Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} v_0\Delta t + a\left(k+1\right)\Delta t^2\end{aligned}$$

Questa somma corrisponde all'area in rosso nella Figura 2.3, a sinistra in alto. Una approssimazione per difetto, che corrisponde all'area in rosso nella Figura 2.3, a sinistra in basso, sarà

$$\begin{aligned}\Delta s_{tot}^{(-)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[v_0 + a\,(k\Delta t)\right] \Delta t \\ &= \sum_{k=1}^{N} v_0 \Delta t + ak\Delta t^2\end{aligned}$$

Sostituendo adesso il valore di Δt abbiamo, partendo dalla (2.1.1)

$$\sum_{k=1}^{N} \left(v_0 \frac{t}{N} + ak\frac{t^2}{N^2} \right) < \Delta s_{tot} < \sum_{k=0}^{N-1} \left(v_0 \frac{t}{N} + a\,(k+1)\,\frac{t^2}{N^2} \right)$$

ossia

$$v_0 t + a\frac{t^2}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} k < \Delta s_{tot} < v_0 t + a\frac{t^2}{N} + a\frac{t^2}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} k$$

Dato che

$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N\,(N-1)}{2}$$

otteniamo

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) < \Delta s_{tot} < v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

e per $N \to \infty$ abbiamo

$$\Delta s_{tot} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Notiamo che questa non è altro che l'area del trapezio al di sotto della retta blu nei due grafici a sinistra, infatti possiamo scrivere

$$S_{\text{trapezio}} = \frac{\left[v_0 + (v_0 + at)\right] t}{2} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$