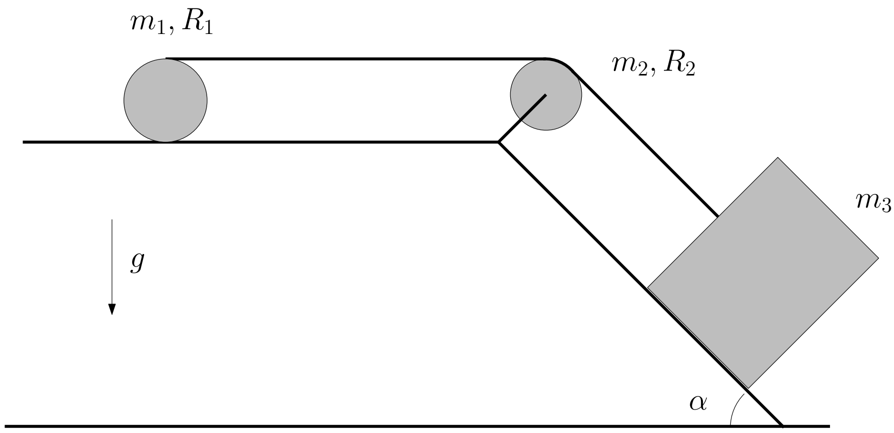
1.13. 10 settembre 2012

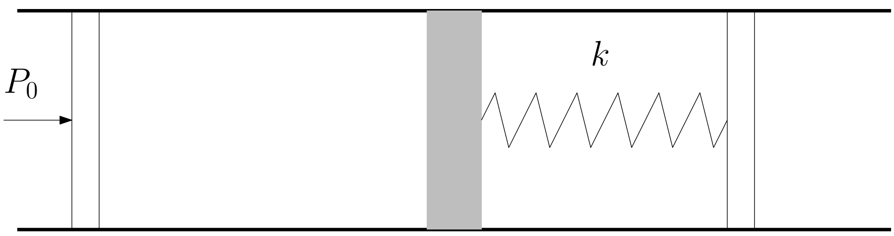
Problema 1 (15 punti)



Un cilindro di massa m_1 e raggio R_1 rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Attorno ad esso è avvolto un filo inestensibile di massa nulla, che è collegato all'estremo opposto ad un blocco di massa m_3, posto su un piano inclinato privo di attrito. Il filo è avvolto attorno a una scanalatura di profondità trascurabile, in modo da non interferire col moto di rotolamento del cilindro di raggio R_1, e appoggia su una carrucola di massa m_2 e raggio R_2, come in figura, sulla quale non può strisciare. La carrucola è libera di ruotare attorno al suo asse. L'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale vale α. Inizialmente il sistema è in quiete.

1. Calcolare il rapporto tra le velocità angolari del cilindro e della carrucola.
2. Calcolare la velocità angolare della carrucola dopo che la massa m_1 si è spostata di un tratto ℓ.
3. Calcolare il tempo richiesto per l'avanzamento precedente.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S con pareti impermeabili al calore è diviso in due parti da un setto che può essere attraversato dal gas. Ciascuna delle due parti è chiusa da un pistone scorrevole, pure impermeabile al calore. Il pistone a destra è collegato al setto da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, mentre su quello a sinistra agisce una pressione esterna P_0 costante.

Inizialmente n moli di un gas perfetto monoatomico si trovano a sinistra all'equilibrio ad una temperatura T_0, la molla è completamente a riposo, e mediante una opportuna membrana si impedisce al gas di attraversare il setto. Si rimuove quindi la membrana, ed il gas passa gradualmente dalla sezione a pressione maggiore a quella a pressione minore.

1. Supponendo che tutto il gas passi a destra, calcolare la temperatura finale di equilbrio.

2. Sotto quale condizione il gas passa effettivamente tutto a destra?

3. Calcolare la variazione di entropia del gas.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Detta ω_1 la velocità angolare del cilindro appoggiato, dalla condizione di rotolamento di quest'ultimo sul piano segue che la velocità del filo

$$v_f = -2\omega_1 R_1$$

ma dato che il filo non striscia sulla carrucola sarà anche

$$v_f = -\omega_2 R_2$$

dove ω_2 è la velocità angolare di quest'ultima. Quindi

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{2R_1}$$

Domanda 2

L'energia del sistema vale

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 R_1^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 R_2^2\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_f^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

dove x è la lunghezza del filo che si trova oltre la carrucola, e $v_f = \dot{x}$. Usando le relazioni precedenti possiamo riscrivere tutto questo nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right) R_2^2\omega_2^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

Eguagliando l'energia iniziale a quella finale troviamo

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right) R_2^2\omega_2^2 - m_3 g 2\ell \sin\alpha$$

dove si è tenuto conto del fatto che quando il cilindro è avanzato di ℓ la lunghezza del filo srotolato è 2ℓ, dato che il la velocità del centro di massa del cilindro è

$$v_2 = -\omega_1 R_1 = \frac{1}{2} v_f$$

Quindi

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4m_3 \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3} \frac{g\ell}{R_2^2}}$$

Domanda 3

Il moto del centro di massa del cilindro è uniformemente accelerato. Si puà arrivare rapidamente a questo risultato scrivendo

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{x}^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

e derivando otteniamo

$$\dot{E} = \left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{x}\ddot{x} - m_3 g \dot{x} \sin\alpha = 0$$

da cui l'equazione del moto

$$\ddot{x} = \frac{m_3 g \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3}$$

L'accelerazione del centro di massa del cilindro è quindi

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{m_3 g \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3}$$

ed il tempo richiesto

$$\tau = \sqrt{\frac{2\ell}{a_1}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Durante la trasformazione la variazione di energia del sistema è uguale al lavoro fatto dalla pressione esterna. Quindi

$$P_0 V_0 = nRT_0 = nc_V (T_f - T_0) + \frac{k}{2}\ell^2$$

D'altra parte nello stato finale

$$nRT_f = P_f V_f = V_f \frac{k\ell}{S} = k\ell^2$$

e quindi

$$nRT_0 = nc_V \left(T_f - T_0\right) + \frac{1}{2} nRT_f$$

da cui

$$T_f = \frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R} T_0 > T_0$$

Domanda 2

Se tutto il gas passa a destra, la sua pressione finale dovrà essere minore di P_0. Quindi

$$P_f < P_0$$

D'altra parte

$$P_f = \frac{nRT_f}{V_f} = \frac{nRT_f}{S\ell} = k\frac{nRT_f}{S^2 P_f}$$

da cui

$$\sqrt{\frac{knRT_f}{S^2}} = \sqrt{\frac{knR}{S^2}\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}} T_0 < P_0$$

Domanda 3

Calcoliamo direttamente la differenza di entropia tra lo stato di equilibrio iniziale e finale:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0} \\
&= nc_V \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + nR\log\left(\frac{T_f}{T_0}\frac{P_0}{P_f}\right) \\
&= nc_P \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + nR\log\left(\frac{P_0}{P_f}\right) \\
&= nc_P \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + \frac{1}{2}nR\log\left(P_0^2\frac{S^2}{knR}\frac{c_p - \frac{1}{2}R}{c_P}\right)
\end{aligned}$$