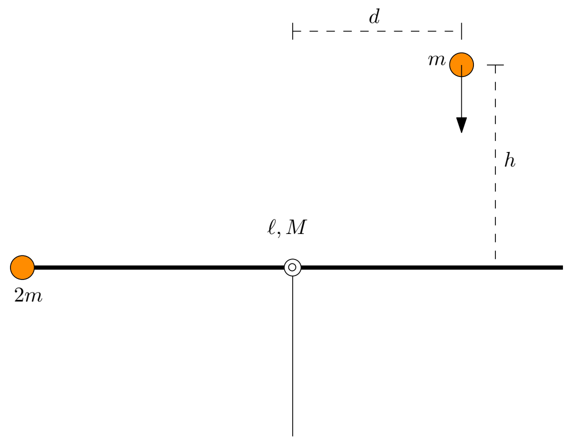
1.14. 20 gennaio 2012

Problema 1 (15 punti)



Una sbarra di lunghezza ℓ e massa M è libera di ruotare attorno al suo punto medio in un piano verticale. Ad uno dei suoi estremi è collegata una massa $2m$, ed inizialmente la sbarra è mantenuta in equilibrio in posizione orizzontale. Una seconda massa m viene lasciata cadere sulla sbarra da una altezza h ad essa relativa, in modo da urtarla ad una distanza d dal punto medio. Immediatamente prima dell'urto la sbarra viene lasciata libera: l'urto è istantaneo e la massa resta fissata alla sbarra.

1. Determinare la velocità angolare della barra immediamente dopo l'urto.
2. Per quale valore minimo di h la sbarra riesce ad arrivare in posizione verticale, con la massa $2m$ al di sopra del punto medio della sbarra?
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema risultante attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.

Problema 2 (15 punti)

Un recipiente impermeabile al calore contiene n moli di un gas perfetto monoatomico e una massa m di ghiaccio. Inizialmente il sistema è in equilibrio ad una temperatura $T_0 < T_f$ e ad una pressione P_0. Abbiamo indicato con T_f la temperatura di fusione del ghiaccio, che considereremo agli effetti di questo problema indipendente dalla pressione. Assumeremo inoltre che il volume del ghiaccio sia costante, e indicheremo con λ il suo calore latente di fusione.

1. Calcolare la capacità termica C del sistema
2. Supponendo di avere a disposizione un bagno termico di temperatura T_B appena inferiore a T_f determinare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.
3. Stessa domanda se la temperatura del bagno termico è appena superiore a T_f

Soluzione primo problema

Domanda 1

Nell'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al punto di sospensione, dato che la reazione vincolare in esso è l'unica forza impulsiva. Quindi

$$-m\sqrt{2gh}d = I\omega$$

dove

$$I = 2m\frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{12}M\ell^2 + md^2$$

è il momento di inerzia del sistema dopo l'urto rispetto al punto di sospensione. Quindi

$$\omega = -\frac{md\sqrt{2gh}}{I}$$

Domanda 2

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia, quindi nel caso limite

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 2mg\frac{\ell}{2} - mgd$$

da cui

$$\omega^2 = 2\frac{mg}{I}(\ell - d) = \frac{m^2d^2(2gh)}{I^2}$$

Risolvendo per h otteniamo

$$h = \frac{I}{md^2}(\ell - d)$$

Domanda 3

L'energia del sistema è

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - (M + 3m)\, g\delta_{CM}\cos\theta$$

dove

$$\delta_{CM} = \frac{m}{M + 3m}(\ell - d)$$

è la distanza del centro di massa dal punto di sospensione. Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M + 3m)\, g\delta_{CM}\theta^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(M + 3m)\, g\delta_{CM}}{I}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il volume occupato dal gas rimane costante avremo

$$dQ = nc_V dT + mcdT$$

dove c è il calore specifico del ghiaccio. Avremo quindi

$$C = nc_V + mc$$

Domanda 2

Potremo estrarre lavoro utile fino a quando la temperatura del sistema non raggiunge T_f. Indicando con Q_1 il calore ceduto a questo e Q_2 quello estratto dal bagno termico avremo

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - C\left(T_f - T_0\right)$$

Per estrarre il massimo lavoro possibile dobbiamo operare in maniera reversibile. Quindi l'entropia dell'universo non cambia

$$\Delta S_{tot} = C\log\left(\frac{T_f}{T_0}\right) - \frac{Q_2}{T_f} = 0$$

e abbiamo

$$Q_2 = CT_f \log\frac{T_f}{T_0}$$

Sostituendo troviamo il lavoro:

$$W = CT_f \log\frac{T_f}{T_0} - C\left(T_f - T_0\right)$$

Domanda 3

Il lavoro è lo stesso: infatti non possiamo ricavare lavoro utile utilizzando due sorgenti alla stessa temperatura. Per verificarlo osserviamo che operando fino a quando tutto il ghiaccio si è sciolto avremo

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - \lambda m$$

e

$$\Delta S_{tot} = \frac{\lambda m}{T_f} - \frac{Q_2}{T_f} = 0$$

Quindi $Q_2 = \lambda m$ e $W = 0$.