1.17. 8 febbraio 2013

Problema 1 (15 punti)

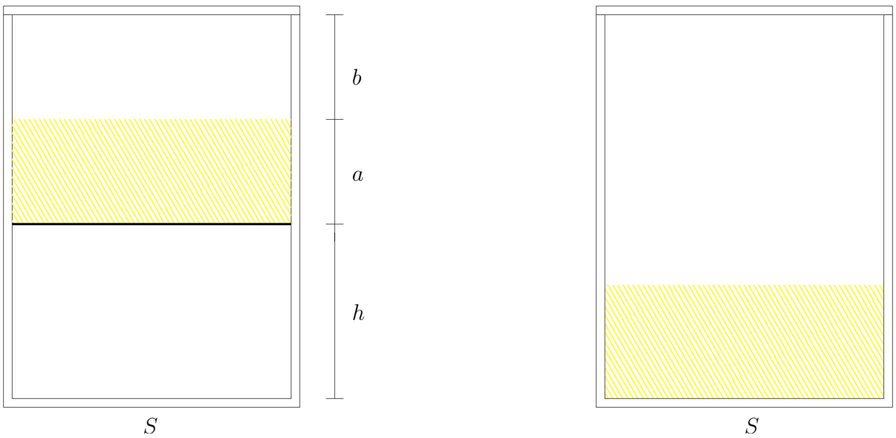
Un'astronave di massa m si trova in un'orbita ellittica attorno al sole. La velocità dell'astronave al perielio è quattro volte più grande di quella all'afelio, ed il periodo dell'orbita è $T = 4 \times 10^7$s.

1. Calcolare la massima e la minima distanza tra l'astronave e il sole.

2. Ad un certo istante l'equipaggio dell'astronave decide di cambiare orbita. Per farlo accende il sistema di propulsione a reazione per un tempo molto breve rispetto al periodo orbitale, espellendo una massa $m/2$ di gas con una velocità (relativa all'astronave) di modulo V_0 nella direzione opposta al moto. In quale punto dell'orbita si deve espellere la massa per ottenere il massimo aumento dell'energia cinetica del carico utile dell'astronave (che non comprende il gas)?

3. Se la massa viene espulsa al perielio, scegliere V_0 in modo da immettere l'astronave su un'orbita parabolica.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S è separato in due parti da un setto scorrevole di massa e spessore trascurabile. Il cilindro non permette il passaggio di calore, mentre il setto si. Nello scomparto inferiore sono presenti n moli di gas perfetto monoatomico. Sopra il setto si trova invece del liquido di densità ρ. Inizialmente il setto si trova ad una altezza h dal fondo del cilindro, l'altezza della colonna di liquido è a e al di sopra di esso si trova un volume vuoto di altezza b.

1. Calcolare la temperatura iniziale del sistema.

2. Il setto si rompe. Calcolare la temperatura di equilibrio del sistema, supponendo che la capacità termica del liquido sia costante e valga C.

3. Calcolare la variazione di entropia del sistema, dicendo in particolare se è positiva, negativa o nulla.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il momento angolare

$$L = m\omega r^2$$

si conserva. Quindi deve valere

$$mv_+ r_+ = mv_- r_-$$

dove abbiamo indicato con r_+, r_- le distanze dal sole all'afelio e al perielio, e con v_+, v_- le relative velocità. Dato che $v_- = 4v_+$ abbiamo

$$r_+ = 4r_-$$

Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

dove $a = (r_+ + r_-)/2$ è il semiasse maggiore. Quindi

$$r_+ + r_- = \left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3}$$

Risolvendo abbiamo

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{1}{5}\left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3} \\ r_+ &= \frac{4}{5}\left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Domanda 2

Nel moto a reazione l'aumento della velocità è dato da

$$v_f - v_i = V_0 \log \frac{m_i}{m_f}$$

da cui, posto $m_i = m$ e $m_f = m/2$,

$$v_f = v_i + V_0 \log 2$$

La relativa variazione dell'energia cinetica del carico utile sarà

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \frac{m}{4}\left(v_i + V_0 \log 2\right)^2 - \frac{m}{4}v_i^2 \\ &= \frac{m}{4}\left(\log 2\right)^2 V_0^2 + \frac{m}{2}v_i V_0 \log 2\end{aligned}$$

Di conseguenza conviene espellere la massa quando v_i è massimo, ossia al perielio.

Domanda 3

All'afelio e al perielio prima dell'espulsione della massa valgono le relazioni

$$\begin{aligned}E &= \frac{L^2}{2mr_+^2} - \frac{GMm}{r_+} \\ E &= \frac{L^2}{2mr_-^2} - \frac{GMm}{r_-}\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

ossia

$$L^2 = 2GMm^2\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)^{-1}$$

Subito dopo l'espulsione deve essere

$$E' = \frac{L'^2}{mr_-^2} - \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_-} = 0 \tag{1.17.1}$$

Il momento angolare dell'astronave dopo la fase di propulsione sarà

$$L' = \frac{m}{2}\left(v_i + V_0 \log 2\right) r_- = \frac{1}{2}L + \frac{m}{2}V_0 r_- \log 2$$

Sostituendo nella (1.17.1) otteniamo

$$V_0 = \frac{1}{\log 2}\sqrt{\frac{2GM}{r_-}}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

La pressione del gas è $\rho g a$, e il suo volume è Sh. Di conseguenza la temperatura del gas e dell'intero sistema deve essere

$$T_0 = \frac{\rho g S a h}{nR}$$

Domanda 2

L'energia interna del sistema gas+liquido non deve cambiare, quindi

$$(nc_V + C)\, T_0 + Mg\left(h + \frac{a}{2}\right) = (nc_V + C)\, T_f + Mg\frac{a}{2}$$

dove $M = \rho S a$ è la massa del liquido. Di conseguenza

$$T_f = T_0 + \frac{Mgh}{nc_V + C} = \frac{\rho g S a h}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{c_V + \frac{C}{n}}\right)$$

Domanda 3

Abbiamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = (nc_V + C)\,\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

da cui

$$\Delta S = (nc_V + C)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0}$$

Esplicitamente otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= (nc_V + C)\log\left(1 + \frac{R}{c_V + C/n}\right) + nR\log\left(1 + \frac{b}{h}\right) \\
&= (nc_V + C)\log\left(\frac{nc_P + C}{nc_V + C}\right) + nR\log\left(1 + \frac{b}{h}\right) > 0
\end{aligned}$$