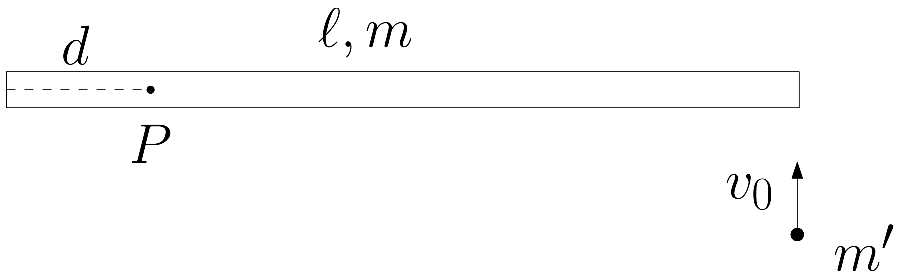
1.19. 10 luglio 2013

Problema 1 (15 punti)



Un'asta di lunghezza ℓ e massa m può ruotare senza attrito attorno ad un punto P posto ad una distanza $d < \ell/2$ da un estremo, rimanendo in un piano orizzontale.

1. Una particella di massa m' e velocità v_0 diretta come in figura urta la sbarra nell'estremo più lontano da P e rimane unita ad essa. Determinare la velocità angolare della sbarra dopo l'urto.

2. Si consideri adesso il caso $d = \ell/2$. La sbarra viene messa in movimento con velocità angolare ω_0, e ad un certo istante uno dei suoi estremi urta elasticamente un punto materiale di massa m' in quiete. Determinare m' in modo tale che dopo l'urto la sbarra sia ferma.

3. Sempre nel caso $d = \ell/2$, e per il valore di m' precedentemente determinato, calcolare il modulo dell'impulso applicato dal vincolo alla sbarra durante l'urto.

Problema 2 (15 punti)

Due corpi hanno la stessa capacità termica C dipendente linearmente dalla temperatura, $C = bT$. Si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0, in presenza di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono compiere trasformazioni termodinamiche arbitrarie sul sistema.

1. Calcolare il massimo aumento possibile per l'entropia totale.

2. Determinare la massima temperatura alla quale è possibile portare uno dei due corpi, scelto arbitrariamente.

3. Se si pongono inizialmente e permanentemente i due corpi in contatto termico tra di loro, quanto vale il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema?

Soluzione primo problema

Prima domanda

Si conserva il momento angolare rispetto a P. Possiamo allora scrivere

$$m' v_0 (\ell - d) = \left[I_P + m' (\ell - d)^2 \right] \omega$$

dove

$$I_P = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2} - d\right)^2$$

è il momento di inerzia della sbarra rispetto a P. In conclusione

$$\omega = \frac{m' v_0 (\ell - d)}{\frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2} - d\right)^2 + m'(\ell - d)^2}$$

Seconda domanda

Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema e la sua energia. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m\ell^2\right)\omega_0^2 &= \frac{m'}{2} v^2 \\
\frac{1}{12} m\ell^2 \omega_0 &= m' \frac{\ell}{2} v
\end{aligned}$$

Dove abbiamo indicato con v la velocità del punto materiale dopo l'urto. Ricavando quest'ultima dalla seconda relazione

$$v = \frac{m}{m'} \frac{1}{6} \ell \omega_0$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$m' = \frac{1}{3} m$$

Terza domanda

La quantità di moto della sbarra è nulla prima e dopo l'urto, quindi durante l'urto l'impulso totale applicato ad essa è nullo. Questo è dato dalla somma dell'impulso applicato dal vincolo e di quello applicato dal punto materiale, che saranno quindi uguali in modulo e direzione ma opposti in verso. Per il terzo principio l'impulso che il punto materiale applica alla sbarra è uguale e opposto a quello che la sbarra applica al punto materiale.

In conclusione l'impulso J cercato sarà uguale a quello applicato dalla sbarra al punto materiale. Conoscendo la variazione della quantità di moto di quest'ultimo possiamo scrivere

$$J = m' v = \left(\frac{1}{3} m\right)\left(\frac{1}{6} \frac{m}{m'} \ell \omega_0\right) = \frac{1}{6} m \ell \omega_0$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

La massima produzione di entropia si otterrà ponendo i due corpi in contatto con il bagno termico. Le temperature finali saranno $T_1 = T_2 = T_B$, e l'entropia prodotta

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{kTdT}{T} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{kTdT}{T} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + 2b\left(T_B - T_0\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con Q_B il calore ceduto al bagno termico. D'altra parte

$$Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

dove Q_1 e Q_2 sono i calori ceduti ai due corpi, quindi

$$Q_B = -2\int_{T_0}^{T_B} bTdT = b\left(T_0^2 - T_B^2\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{b}{T_B}\left(T_0^2 - T_B^2\right) + 2b\left(T_B - T_0\right) \\ &= bT_B\left(\frac{T_0}{T_B} - 1\right)^2\end{aligned}$$

Seconda domanda

In questo caso si deve procedere reversibilmente, quindi $\Delta S = 0$. Nello stato finale uno dei due corpi avrà la stessa temperatura del bagno termico, l'alto la temperatura massima cercata. Quindi

$$\Delta S = \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_f} \frac{bTdT}{T} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{bTdT}{T} = 0$$

da cui

$$\frac{Q_B}{T_B} + b\left(T_f + T_B - 2T_0\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned}Q_B &= -\int_{T_0}^{T_f} kTdT - \int_{T_0}^{T_B} kTdT \\ &= \frac{b}{2}\left(2T_0^2 - T_f^2 - T_B^2\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left(2T_0^2 - T_f^2 - T_B^2\right) + 2T_B\left(T_f + T_B - 2T_0\right) = 0$$

Risolvendo troviamo la temperatura finale

$$T_f = T_B + \sqrt{2}\,|T_0 - T_B|$$

Terza domanda

I due corpi in contatto termico sono equivalenti ad un unico corpo di capacità termica $2C$. Allora avremo

$$Q_B + Q_{12} + W = 0$$

e

$$Q_{12} = 2b\int_{T_0}^{T_B} T\,dT = b\left(T_B^2 - T_0^2\right)$$

Lavorando reversibilmente inoltre dovrà essere

$$\Delta S = \frac{Q_B}{T_B} + 2b\int_{T_0}^{T_B} dT = \frac{Q_B}{T_B} + 2b\,(T_B - T_0) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} W &= -Q_B - Q_{12} = 2bT_B\,(T_B - T_0) - b\left(T_B^2 - T_0^2\right) \\ &= b\,(T_B - T_0)^2 \end{aligned}$$