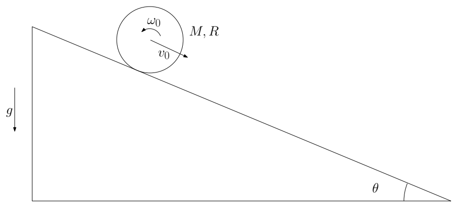
1.20. 10 settembre 2013

Esercizio 1 (15 punti)



Un cilindro di raggio R e massa M si trova appoggiato su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ. Si è in presenza di attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente μ_D.

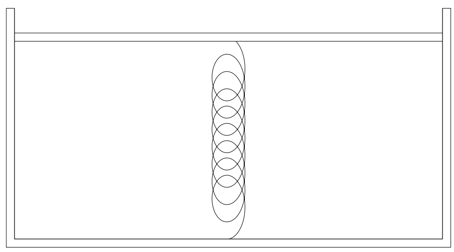
Inizialmente il cilindro ruota con velocità angolare $\omega_0 > 0$ e il suo centro di massa si muove con velocità $v_0 > 0$ parallelamente al piano.

1. Si osserva che a $t = t_1$ il moto del cilindro è diventato di puro rotolamento. Per quale valore minimo di μ_D questo è possibile?

2. Calcolare t_1.

3. Calcolare l'energia dissipata.

Esercizio 2 (15 punti)



Nel recipiente in figura, impermeabile al calore, sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico. La parete superiore (di superficie totale S) può scorrere liberamente ed ha una massa M. Tra essa e la parete inferiore è fissata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0. La pressione esterna al recipiente è trascurabile.

1. Inizialmente il sistema è all'equilibrio e la molla ha una lunghezza $\ell > \ell_0$. Calcolare la pressione e la temperatura del gas.

2. Si fornisce lentamente del calore al sistema misurando la variazione di temperatura. Dire per quale valore di ℓ_0 la capacità termica del sistema è costante, e calcolarla.

3. Quando il sistema si trova nello stato di equilibrio iniziale la molla si spezza. Calcolare la variazione di entropia del sistema, limitandosi al caso $\ell_0 = 0$.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} I_{cm}\dot{\omega} &= F_A R \\ M\dot{v} &= F_A + Mg\sin\theta \\ 0 &= N - Mg\cos\theta \end{aligned}$$

Dato che nelle condizioni indicate il punto di contatto si muove in direzione positiva la forza di attrito vale $F_A = -\mu_D N = -\mu_D Mg\cos\theta$. Quindi

$$\begin{aligned} I_{cm}\dot{\omega} &= -\mu_D MgR\cos\theta \\ M\dot{v} &= -\mu_D Mg\cos\theta + Mg\sin\theta \end{aligned}$$

dove $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse passante per il punto di contatto. Possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} R\dot{\omega} &= -2\mu_D g\cos\theta \\ \dot{v} &= -\mu_D g\cos\theta + g\sin\theta \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo

$$\frac{d}{dt}(v + \omega R) = g(\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta)$$

Nel puro rotolamento $v + \omega R = 0$. Dato che inizialmente questa quantità è positiva, affinché questa condizione venga raggiunta è necessario che

$$\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta < 0$$

e quindi che

$$\mu_D > \frac{1}{3}\tan\theta$$

Seconda domanda

Integrando l'equazione del moto precedente troviamo

$$v + \omega R = v_0 + \omega_0 R + g(\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta)\,t$$

e quindi il puro rotolamento inizia all'istante

$$t_1 = \frac{v_0 + \omega_0 R}{g(3\mu_D\cos\theta - \sin\theta)}$$

Terza domanda

L'energia dissipata è data dal lavoro fatto dalla forza di attrito sul cilindro cambiato di segno, cioè

$$W = -\int F_A ds = -F_A \int_0^{t_1} (v + \omega R)\, dt$$

Calcolando l'integrale abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \mu_D M g \cos\theta \left[(v_0 + \omega_0 R)\, t_1 + \frac{1}{2} g \left(\sin\theta - 3\mu_D \cos\theta\right) t_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{\mu_D \cos\theta}{3\mu_D \cos\theta - \sin\theta} \right) (v_0 + \omega_0 R)^2 \end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

All'equilibrio deve essere

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{k(\ell - \ell_0) + Mg}{S} \\ V_0 &= S\ell \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di stato $PV = nRT$ troviamo

$$T_0 = \frac{k\ell(\ell - \ell_0) + Mg\ell}{nR} \tag{1.20.1}$$

Seconda domanda

Dal primo principio abbiamo per il sistema composto da gas, molla e pistone

$$dQ = dU$$

dato che il sistema non compie lavoro. L'energia del sistema (data dalla somma dell'energia interna del gas, dell'energia elastica della molla e energia potenziale gravitazionale del pistone) vale

$$U = nc_V T + \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 + Mg\ell$$

e quindi

$$dU = nc_V dT + k(\ell - \ell_0)\, d\ell + Mg d\ell$$

D'altra parte dalla relazione di equilibrio (1.20.1) segue che

$$dT = \frac{k(2\ell - \ell_0) + Mg}{nR} d\ell$$

e quindi

$$dQ = nc_V dT + \left[k\left(\ell - \ell_0\right) + Mg\right] d\ell$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= nc_V + \left[k\left(\ell - \ell_0\right) + Mg\right] \frac{nR}{k\left(2\ell - \ell_0\right) + Mg} \\ &= nc_V + nR\frac{k\left(\ell - \ell_0\right) + Mg}{k\left(2\ell - \ell_0\right) + Mg} \end{aligned}$$

che è costante quando

$$-2k\ell_0 + 2Mg = -k\ell_0 + Mg$$

ossia

$$\ell_0 = \frac{Mg}{k}$$

Quando questo avviene si ha

$$\frac{dQ}{dT} = nc_V + n\frac{1}{2}R$$

Terza domanda

Dal primo principio si ha che

$$nc_V T_0 + \frac{k}{2}\ell^2 + Mg\ell = nc_V T_f + Mg\ell_f$$

Sappiamo che all'equilibrio

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{k\ell^2 + Mg\ell}{nR} \\ T_f &= \frac{Mg\ell_f}{nR} \end{aligned}$$

e sostituendo otteniamo

$$\left(\frac{c_V}{R} + \frac{1}{2}\right) k\ell^2 + \frac{c_V}{R}Mg\ell + Mg\ell = \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) Mg\ell_f$$

o anche, posto $\gamma = c_P/c_V$,

$$\ell_f = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell^2}{Mg} + \ell$$

La variazione di entropia del sistema si scrive

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{V_f}{V_0} \\
&= nc_V \log \frac{Mg\ell_f}{k\ell^2 + Mg\ell} + nR \log \frac{\ell_f}{\ell} \\
&= nc_V \log \frac{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}}{1 + \frac{k\ell}{Mg}} + nR \log \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}\right] \\
&= nc_P \log \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}\right] - nc_V \log \left[1 + \frac{k\ell}{Mg}\right]
\end{aligned}
$$