1.2. 12 febbraio 2009

Problema 1 (15 punti)

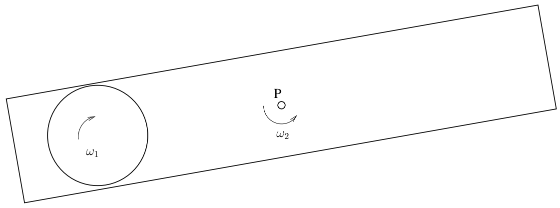

Figura 1.3.: La scatola rotante e il disco al suo interno considerati nel problema.

Il disco in Figura 1.3, di massa m e raggio R, è libero di ruotare e di scivolare all'interno della scatola rettangolare in figura, di lunghezza ℓ. La scatola può ruotare liberamente attorno al perno centrale P in figura, e il suo momento di inerzia rispetto ad esso è I. Si supponga inizialmente che non vi sia attrito, e che gli urti con le pareti siano elastici.

1. Trovare tre quantità conservate indipendenti per il sistema.
2. Discutere le possibili traiettorie per il centro di massa del disco.
3. Supporre adesso che vi sia attrito tra il disco e le pareti terminali corte della scatola, e che l'urto con esse non sia più elastico. Se inizialmente questa non ruota e il disco si trova al centro di essa con velocità v_0 e velocità angolare ω_0, calcolare le velocità angolari finali ω_1 e ω_2 dei due corpi.

Problema 2 (15 punti)

Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro di sezione S chiuso da un pistone mobile. Tra pistone e cilindro è presente attrito, che si oppone al movimento del pistone con una forza costante F_a. Il gas è costantemente in equilibrio con un bagno termico a temperatura T_0.

1. Determinare il calore ceduto dal sistema gas+cilindro+pistone in un'espansione da un volume V_1 a un volume V_2.
2. Stessa domanda nella compressione da V_2 a V_1.
3. Determinare la variazione di entropia del gas e del bagno termico nelle due trasformazioni.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che non vi sono attriti, l'energia cinetica del sistema si conserva. Inoltre le uniche forze esterne sono applicate al perno, e quindi si conserverà il momento angolare totale.

Infine, consideriamo il momento angolare del solo disco rispetto al suo centro di massa. Dato che le uniche forze che agiscono sul disco sono perpendicolari ad esso e quindi hanno braccio nullo, anche questo si conserverà.

Domanda 2

Scriviamo le tre quantità conservate determinate precedentemente. Per l'energia cinetica abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_D \omega^2$$

dove abbiamo indicato con θ l'angolo di rotazione della scatola, con r la distanza del centro di massa del disco dal perno, con ω la velocità angolare del disco e con I_D il suo momento di inerzia.

Per quanto riguarda il momento angolare totale abbiamo

$$L = I\dot{\theta} + mr^2\dot{\theta} + I_D\omega$$

e per il momento angolare del disco

$$L_D = I_D\omega$$

Da questa ultima relazione segue che la velocità angolare ω è costante.

Possiamo ricavare $\dot{\theta}$ dalla conservazione del momento angolare

$$\dot{\theta} = \frac{L - I_D\omega}{I + mr^2} \tag{1.2.1}$$

e riscrivere la legge di conservazione dell'energia nella forma

$$E' \equiv E - \frac{1}{2} I_D \omega^2 = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L - I_D\omega)^2}{I + mr^2} \equiv \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \tag{1.2.2}$$

che definisce il potenziale efficace $U_{eff}(r)$ e la costante E'. Possiamo adesso discutere le possibili orbite qualitativamente.

Per questo facciamo riferimento alla Figura 1.4, nella quale è riportato un grafico qualitativo del potenziale efficace. Sono state aggiunte due barriere infinite in $r = \pm (\ell/2 - R)$ che rappresentano le pareti terminali della scatola. Sono inoltre riportati alcuni possibili valori di E' (le linee orizzontali tratteggiate) che corrispondono alle seguenti possibilità:

1. Il centro di massa del disco può essere solo in $r = \ell/2 - R$, e quindi la relativa traiettoria sarà una circonferenza.

2. In questo caso sono l'orbita sarà limitata tra un valore minimo di r corrispondente alla intersezione tra la retta e la curva, e un valore massimo corrispondente alla parete in $r = \ell/2 - R$. L'orbita sarà limitata radialmente in tale intervallo. Il moto angolare sarà determinato dalla Equazione (1.2.1).

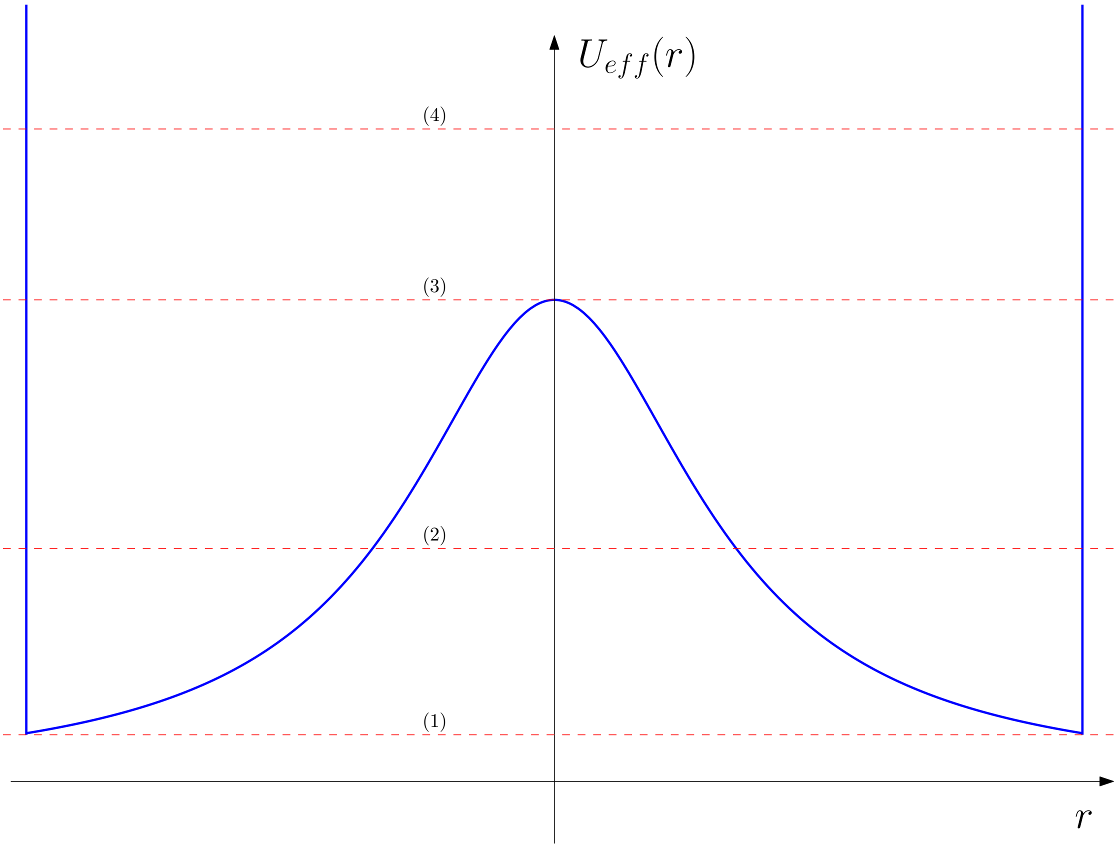

Figura 1.4.: Grafico qualitativo del potenziale efficace definito dall'Equazione (1.2.2). Le linee tratteggiate si riferiscono a diversi possibili valori della costante E'. La barriera di potenziale infinita alle estremità corrisponde alle pareti laterali della scatola.

3. In questo caso il valore minimo per r è $r = 0$, e quello massimo è uguale al precedente. A seconda della posizione e della velocità iniziali il disco si avvicinerà al perno (eventualmente dopo aver rimbalzato una volta su una parete esterna). Dato che la derivata del potenziale efficace nell'intersezione con la retta orizzontale è nulla, il disco impiegherà un tempo infinito per arrivare sul perno, e la traiettoria sarà quindi una spirale che si avvolgerà attorno al centro.

4. In questo caso il disco potrà attraversare la posizione del perno, e quindi si muoverà da un estremo all'altro della scatola, rimbalzando sulle pareti.

Domanda 3

Delle tre leggi di conservazione determinate precedentemente resta valida solo quella del momento angolare totale: infatti a causa dell'attrito viene dissipata energia e sul disco durante l'urto con le pareti agisce un momento.

La configurazione finale sarà quindi quella nella quale il disco si trova a contatto con una delle pareti. Dato che non deve strisciare su di esse dovrà essere $\omega_1 = \omega_2 = \omega_f$. Dalla conservazione del momento angolare totale segue immediatamente che

$$I_D \omega_0 = \left[I + I_D + m \left(\frac{\ell}{2} - R \right)^2 \right] \omega_f$$

che permette di determinare ω_f

$$\omega_f = \frac{I_D}{I + I_D + m \left(\frac{\ell}{2} - R \right)^2} \omega_0$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il gas rimane a temperatura costante, l'energia del sistema pistone+cilindro+gas non cambia e il lavoro fatto su di esso è uguale al calore ceduto. La forza esterna necessaria a mantenere istante per istante il pistone in equilibrio meccanico per una espansione è data da

$$F_{ext} = PS - F_a$$

e quindi

$$\begin{aligned} Q &= -\int_{V_1}^{V_2} \left(P - \frac{F_a}{S} \right) dV \\ &= -\int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_0}{V} - \frac{F_a}{S} \right) dV \\ &= RT_0 \log \frac{V_1}{V_2} + \frac{F_a}{S} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Domanda 2

In questo caso la forza di attrito cambia verso, e quindi

$$\begin{aligned} Q &= -\int_{V_2}^{V_1} \left(P + \frac{F_a}{S} \right) dV \\ &= -\int_{V_2}^{V_1} \left(\frac{RT_0}{V} + \frac{F_a}{S} \right) dV \\ &= RT_0 \log \frac{V_2}{V_1} + \frac{F_a}{S} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Domanda 3

Per il bagno termico la variazione di entropia nelle due trasformazioni è

$$\Delta S_1 = R\log\frac{V_1}{V_2} + \frac{F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$
$$\Delta S_2 = R\log\frac{V_2}{V_1} + \frac{F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$

e complessivamente

$$\Delta S = \frac{2F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$

Per il gas abbiamo invece due trasformazioni isoterme, e quindi

$$\Delta S_1' = R\log\frac{V_2}{V_1}$$
$$\Delta S_2' = R\log\frac{V_1}{V_2}$$

e quindi complessivamente

$$\Delta S' = 0$$