1.22. 4 febbraio 2014

Esercizio 1 (15 punti)

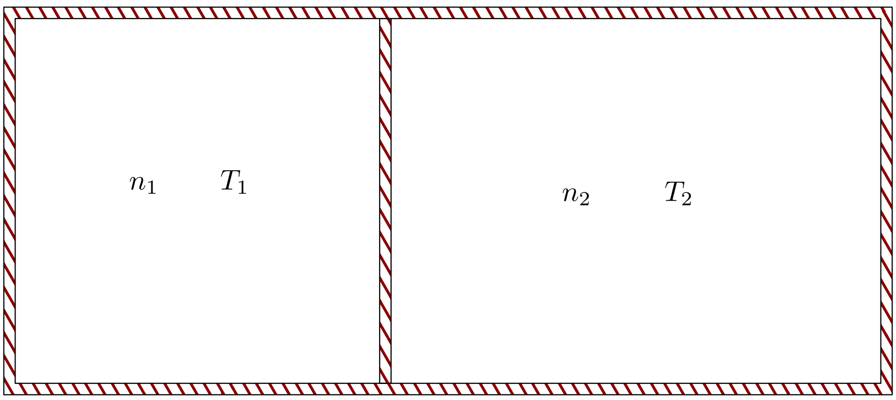
Un estremo di una sbarra sottile di lunghezza ℓ è imperniato e libero di ruotare attorno ad un supporto mobile. Questo può muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. La massa del supporto è trascurabile, mentre quella della sbarra vale in totale m ed è distribuita su di essa in modo non noto. Si conosce però la posizione del centro di massa della sbarra, che si trova ad una distanza a dall'estremo imperniato. Inoltre il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa vale $I_{cm} = km\ell^2$ con k costante.

1. Se al supporto è applicata una forza orizzontale costante f, quale deve essere l'angolo che la sbarra forma con la direzione verticale per rimanere in equilibrio?

2. Supponiamo che il supporto si trovi inizialmente in moto con velocità costante v_0, e che la sbarra sia in posizione verticale in equilibrio stabile. Ad un certo momento il supporto incontra un ostacolo che lo blocca improvvisamente. Calcolare per quale valore minimo di v_0 la sbarra compie un giro completo.

3. Nel caso precedente, quale relazione di deve essere tra k e a affinché l'energia si conservi nell'urto?

Esercizio 2 (15 punti)



In ciascuno dei due scomparti del recipiente in figura sono contenute rispettivamente n_1 e n_2 moli di un gas perfetto monoatomico. Sia il recipiente che il setto scorrevole interno che divide le due parti sono perfettamente impermeabili al calore. Inizialmente il sistema è all'equilibrio: il volume totale è V, le temperature dei due scomparti sono identiche e uguali a T_0.

1. Calcolare pressioni e volumi iniziali dei due scomparti.

2. Considerare d'ora in poi il solo caso $n_1 = n_2 = 1$. Mediante una opportuna forza esterna si sposta il setto reversibilmente in modo da dimezzare il volume di uno dei due scomparti. Calcolare le nuove temperature dei due scomparti e il lavoro W fatto sul sistema.

3. Il setto intermedio viene adesso bloccato nella posizione raggiunta. Si vuole estrarre dal sistema il massimo lavoro possibile utilizzando una macchina termica reversibile che usa come sorgenti calde e fredde i due scomparti. Quale frazione del lavoro W è possibile recuperare?

Soluzione primo esercizio

Prima domanda

Se la sbarra è in equilibrio l'accelerazione del centro di massa del sistema è orizzontale e vale $a_{cm} = f/m$. In un sistema di riferimento solidale al supporto al centro di massa sarà applicata una forza apparente $-f\hat{x}$ e la forza peso $-mg\hat{y}$. Il momento totale rispetto al perno sarà nullo quando

$$-fa\cos\theta - mga\sin\theta = 0$$

cioè per

$$\tan\theta = -\frac{f}{mg}$$

Seconda domanda

Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al perno. Quindi

$$mav_0 = \left(I_{cm} + ma^2\right)\omega$$

da cui la velocità angolare dopo l'urto

$$\omega = \frac{a}{k\ell^2 + a^2}v_0$$

Da questo momento l'energia si conserva, e l'asta sarà in grado di compiere un giro completo se

$$\frac{1}{2}\left(I_{cm} + ma^2\right)\omega^2 \geq 2mga$$

cioè per

$$v_0 \geq 2\sqrt{ga\left(1 + k\frac{\ell^2}{a^2}\right)}$$

Terza domanda

La variazione di energia nell'urto è

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\left(I_{cm}+ma^2\right)\omega^2-\frac{1}{2}mv_0^2\\ &= \frac{1}{2}m\left[\frac{a^2}{k\ell^2+a^2}-1\right]v_0^2\end{aligned}$$

che si annulla se $k=0$. Questo significa che la massa della sbarra è tutta concentrata nel suo centro di massa, che si può trovare in una posizione arbitraria.

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

L'equilibrio meccanico si ha quando le pressioni dei due scomparti sono uguali. Questo significa

$$\frac{n_1}{V_1}=\frac{n_2}{V_2}$$

e inoltre $V_{1,0}+V_{2,0}=V$, quindi

$$\begin{aligned}V_{1,0} &= \frac{n_1}{n_1+n_2}V\\ V_{2,0} &= \frac{n_2}{n_1+n_2}V\end{aligned}$$

La pressione nei due scomparti sarà dunque

$$P_0=\frac{n_1RT_0}{V_{1,0}}=\frac{n_2RT_0}{V_{2,0}}=\left(n_1+n_2\right)\frac{RT}{V}$$

come ci si poteva aspettare a priori.

Seconda domanda

Durante lo spostamento del setto i gas nei due scomparti compiono una trasformazione adiabatica reversibile. Il lavoro totale fatto sul gas è uguale alla variazione dell'energia interna del sistema

$$W=c_V\left(T_1+T_2-2T_0\right)$$

e dato che le trasformazioni dei due gas sono adiabatiche reversibili vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}VT_1^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \frac{1}{2}VT_0^{\frac{1}{\gamma-1}}\\ \frac{3}{4}VT_2^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \frac{1}{2}VT_0^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

e quindi

$$T_1 = 2^{\gamma-1} T_0$$
$$T_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} T_0$$

Sostituendo otteniamo

$$W = c_V \left[2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\right] T_0 \simeq 0.35\ c_V T_0$$

Terza domanda

Detti dQ_1 e dQ_2 i calori ceduti ai due scomparti in un ciclo infinitesimo, deve essere

$$dQ_1 + dQ_2 + dW' = 0$$

per il primo principio, e quindi

$$W' = -c_V \left(2T_f - T_1 - T_2\right)$$

dove si è indicato con W' il lavoro totale estratto e con T_f la temperatura finale comune dei due scomparti. Operando reversibilmente inoltre deve essere

$$dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

e integrando otteniamo

$$\log \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 0$$

cioè $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$. In conclusione

$$W' = c_V \left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right) = c_V \left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$$

e la frazione del lavoro recuperato è

$$\frac{W'}{W} = \frac{\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2}{T_1 + T_2 - 2T_0} = \frac{\left[2^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}{\left[2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\right]} \simeq 0.43$$