1.25. 2 settembre 2014

Primo esercizio

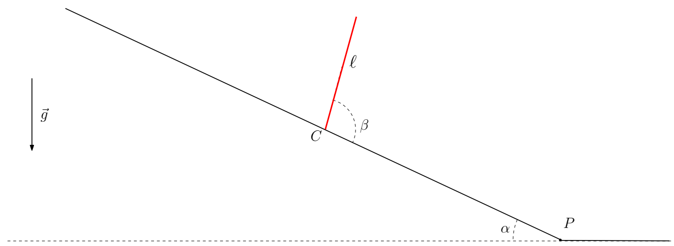

Figura 1.12.: L'asta in caduta lungo il piano inclinato.

Un'asta sottile omogenea ha una lunghezza ℓ e una massa totale m. Un suo estremo C viene appoggiato ad un piano privo di attrito, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α. L'asta e la normale per C al piano inclinato giacciono sullo stesso piano verticale π. L'angolo β, misurato sul piano π, tra l'asta e il piano inclinato è scelto in modo tale che, una volta lasciata libera da ferma, questa scenda lungo il piano inclinato senza ruotare (vedere Figura 1.12). In queste condizioni

1. Calcolare l'accelerazione del centro di massa dell'asta.
2. Fissato α determinare β.
3. Quando il vertice C arriva nel punto P, posto alla base del piano inclinato, rimane istantaneamente fissato ad esso. L'asta può però ruotare liberamente attorno a $P \equiv C$. Determinare la frazione di energia meccanica che viene perduta.

Soluzione

Prima domanda

Se l'asta non ruota l'accelerazione del centro di massa è parallela al piano inclinato. Di conseguenza

$$ma = mg \sin \alpha$$

dato che la reazione del piano è normale ad esso, e quindi

$$a = g \sin \alpha$$

Seconda domanda

Dato che l'asta non ruota, il momento totale delle forze rispetto al centro di massa si deve annullare. La forza peso è applicata al centro di massa e non ha momento, la reazione vincolare è normale al piano. Ha momento nullo solo se anche la sbarra è normale al piano, e quindi $\beta = \pi/2$, indipendentemente da α.

Per rispondere alla domanda si poteva scegliere come polo il punto di contatto tra l'asta e il piano. Si tratta di un polo mobile, ma questo non ha conseguenze sulla seconda equazione cardinale dato che la sua velocità è parallela a quella del centro di massa, e possiamo scrivere

$$\frac{dL}{dt} = M$$

dove L è la componente perpendicolare a π del momento angolare e M la componente perpendicolare a π del momento delle forze. Rispetto al polo C scelto abbiamo

$$L = -mv\frac{\ell}{2}\sin\beta$$
$$M = -mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha)$$

Notare che la reazione vincolare non ha momento in questo caso. Sostituendo nell'equazione del moto troviamo

$$-ma\frac{\ell}{2}\sin\beta = -mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha) \tag{1.25.1}$$

e sostituendo il valore dell'accelerazione arriviamo a

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha)$$

ossia

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ed infine

$$\cos\alpha\cos\beta = 0$$

A meno che il piano sia verticale ($\alpha = \pi/2$) nel qual caso ogni valore di β è accettabile, deve essere $\beta = \pi/2$.

Un terzo modo di procedere poteva essere quello di porsi in un sistema non inerziale solidale all'asta. Ponendo nuovamente il polo in C abbiamo in questo caso che il momento M si deve annullare (dato che $L = 0$). Occorre aggiungere il momento della forza apparente: in questo modo otteniamo

$$0 = ma\frac{\ell}{2}\sin\beta - mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha)$$

che è del tutto equivalente all'Equazione (1.25.1).

Considerando invece il polo nel centro di massa, vediamo che anche la forza apparente ha momento nullo, e ci riconduciamo al ragionamento fatto nella prima soluzione discussa.

Terza domanda

Al momento del contatto si conserva il momento angolare totale rispetto a P, dato che l'unica forza impulsiva è la reazione vincolare. Immediatamente prima del contatto

$$
\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{2}mv^2 \\
L_i &= \frac{\ell}{2}mv
\end{aligned}
$$

e immediatamente dopo

$$
\begin{aligned}
E_f &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2 \\
L_f &= \frac{m\ell^2}{3}\omega
\end{aligned}
$$

Dato che $L_i = L_f$

$$\frac{\ell}{2}mv = \frac{m\ell^2}{3}\omega$$

e quindi

$$\omega = \frac{3}{2}\frac{v}{\ell}$$

Per calcolare la frazione di energia persa fissiamo la costante arbitraria che può comparire nell'energia potenziale in modo che questa sia nulla in P. In questo caso vale

$$
\begin{aligned}
\frac{E_i - E_f}{E_i} &= 1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2} \\
&= 1 - \frac{1}{3}\frac{\ell^2\omega^2}{v^2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Secondo esercizio

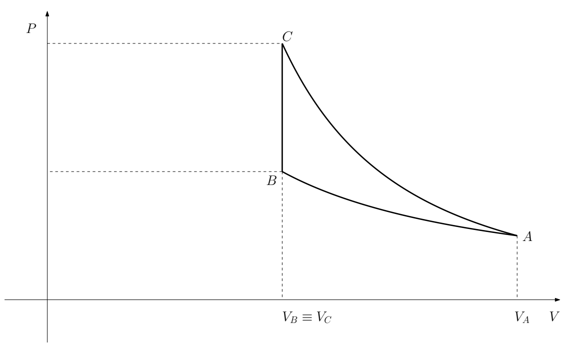

Figura 1.13.: Rappresentazione nel piano $P - V$ del ciclo studiato nell'esercizio.

Una mole di un gas perfetto biatomico compie la trasformazione ciclica rappresentata nel piano P-V in Figura 1.13. La compressione isoterma (da A a B) avviene mantenendo il gas a contatto con un bagno termico alla temperatura T_A. Si pone quindi il gas in contatto termico con un bagno termico alla temperatura T_C mantenendo il volume costante (da B a C) fino al raggiungimento dell'equilibrio. Segue una espansione adiabatica (da C ad A) che riporta il gas nello stato iniziale. Sono note le temperature $T_A = T_B$ e T_C, ed il volume $V_B = V_C$. Tutte le trasformazioni avvengono molto lentamente, e il gas si può considerare istante per istante in uno stato termodinamico ben definito.

1. Calcolare il rendimento del ciclo, esprimendolo in funzione delle sole temperature T_A e T_C.

2. Calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione che, passando per B, lo porta da A a C.

3. Dopo un ciclo, quanto vale la variazione di entropia dell'universo (cioè del gas insieme ai due bagni termici)? Esprimere anche questo risultato in funzione delle sole temperature T_A e T_C.

Soluzione

Prima domanda

Il gas assorbe calore durante la trasformazione isocora. Dato che il gas non fa lavoro sarà, dal primo principio,

$$Q_{ass} = \Delta U = c_V (T_C - T_A)$$

Per il lavoro abbiamo invece

$$L = L_{AB} + L_{CA}$$

ma

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = RT_A \log \frac{V_B}{V_A}$$

e

$$L_{CA} = -c_V (T_A - T_C)$$

quindi

$$\begin{aligned} \eta = \frac{L}{Q_{ass}} &= \frac{RT_A \log \frac{V_B}{V_A} + c_V (T_C - T_A)}{c_V (T_C - T_A)} \\ &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{T_A}{(T_C - T_A)} \log \frac{V_A}{V_B} \end{aligned}$$

Dato che la trasformazione CA è adiabatica e il gas si trova istante per istante in uno stato termodinamico ben definito deve essere

$$V_A^{\gamma-1} T_A = V_B^{\gamma-1} T_C$$

e quindi

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{T_A}{(T_C - T_A)} \log\left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= 1 - \frac{T_A}{T_C - T_A} \log\frac{T_C}{T_A}\end{aligned}$$

Seconda domanda

Dato che lo stato A e C del gas sono collegati da una adiabatica, durante la quale lo stato termodinamico del gas è ben definito per ipotesi, avremo $S_A = S_C$ e quindi $\Delta S_{AC} = 0$.

Terza domanda

Dato che la trasformazione del sistema durante l'isocora è irreversibile, l'entropia deva aumentare. Durante la trasformazione isoterma il bagno termico a temperatura T_A assorbe calore dal gas, e quindi aumenta la sua entropia di

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_A} = -\frac{L_{AB}}{T_A} = \frac{R}{\gamma - 1} \log\frac{T_C}{T_A}$$

Durante la trasformazione isocora il bagno termico a temperatura T_C cede calore al gas, e quindi la sua entropia diminuisce

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_C} = -\frac{Q_{ass}}{T_C} = -\frac{c_V (T_C - T_A)}{T_C}$$

Dato che dopo un ciclo l'entropia del gas non è cambiata avremo

$$\begin{aligned}\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= \frac{R}{\gamma - 1} \log\frac{T_C}{T_A} - \frac{c_V (T_C - T_A)}{T_C} \\ &= \frac{R}{\gamma - 1}\left[\frac{T_A}{T_C} - \log\frac{T_A}{T_C} - 1\right] \\ &= c_V \left[\frac{T_A}{T_C} - \log\frac{T_A}{T_C} - 1\right]\end{aligned}$$

Possiamo mostrare che $\Delta S > 0$ ponendo $x = T_A/T_C$. Abbiamo

$$\Delta S = c_V [x - \log x - 1]$$

Ovviamente se $x = 1$ troviamo $\Delta S = 0$. D'altra parte la derivata

$$\frac{d}{dx}\Delta S = c_V \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$, quindi ΔS ha un minimo assoluto in $x = 1$, ed è sempre $\Delta S \geq 0$.