1.31. 15 gennaio 2016

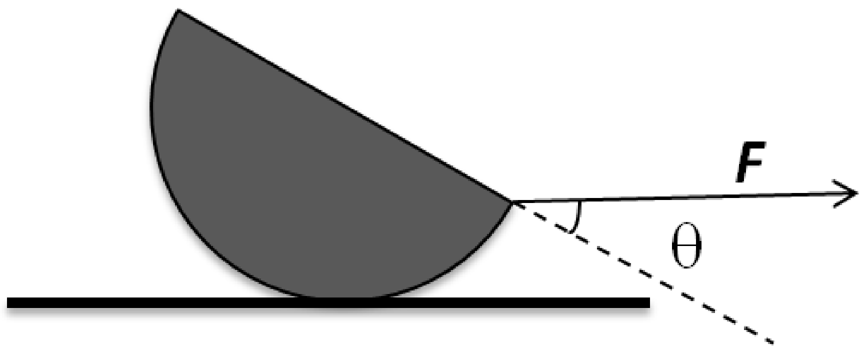

Figura 1.24.: La semisfera considerata nel primo problema.

Primo problema

Una semisfera uniforme, di massa m e raggio r, si trova appoggiata su un piano orizzontale ed è tirata da una forza orizzontale $\boldsymbol{F}$, di modulo incognito, applicata in un punto della circonferenza massima (come in Figura 1.24). In queste condizioni la semisfera si muove di velocità costante $\boldsymbol{v}$ senza oscillazioni, ma inclinata di un angolo incognito θ rispetto alla posizione che assume quando è ferma e nessuna forza esterna orizzontale è applicata. Il coefficiente di attrito dinamico tra semisfera e piano orizzontale vale $\mu_D = 1/4$. Il centro di massa della semisfera dista $3r/8$ dalla superficie piana della semisfera. Determinare:

1. la forza orizzontale responsabile del movimento della semisfera;
2. l'angolo θ di inclinazione della semisfera.
3. *(facoltativo)* Dimostrare che il centro di massa si trova a $3r/8$ dalla superficie piana della semisfera.

Secondo problema.

Un corpo C di massa m viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$. Giunto alla massima quota il corpo esplode in due frammenti C_1 e C_2 di masse $m_1 = m/4$ e $m_2 = 3m/4$. I due frammenti cadono e arrivano simultaneamente sulla superficie piana terrestre da cui era stato lanciato il corpo C. L'esplosione, che può essere considerata istantanea, fornisce ai due frammenti un'energia cinetica addizionale complessivamente pari a $mv_0^2/24$. Determinare:

1. i vettori velocità di C_1 e C_2 immediatamente dopo l'esplosione;
2. l'energia cinetica totale di C_1 e C_2 nell'istante in cui giungono sulla superficie piana terrestre;
3. la distanza tra le posizioni con cui C_1 e C_2 arrivano a terra.

Terzo problema

Un cilindro retto, rigido e adiabatico è diviso in due parti da un setto circolare di area A, anch'esso retto, rigido e adiabatico. Una parte, di volume V_1, contiene n_1 moli di gas ideale biatomico; l'altra parte, di volume V_2, contiene n_2 moli dello stesso gas. Inizialmente la pressione P delle due parti è la stessa ed il sistema si trova in equilibrio meccanico.

1. In tale condizione, si calcoli il rapporto fra le temperature T_1 e T_2 (si assuma nel seguito dell'esercizio che sia $T_1 > T_2$);

Rimanendo il setto bloccato in tale posizione, viene ad un certo punto meno la sua adiabaticità. Si calcolino, ad equilibrio raggiunto:

2. il modulo della forza vincolare che mantiene il setto bloccato;
3. la variazione di entropia del sistema.
4. Considerando ora il sistema nella sua configurazione iniziale, con setto adiabatico, determinare il massimo lavoro estraibile dal sistema usando un'opportuna macchina termica ciclica.

Soluzione primo problema

Usiamo un sistema di riferimento ortogonale con asse y verticale e rivolto verso l'alto, asse x orizzontale rivolto nel verso di $\boldsymbol{F}$.

Elenco delle forze che agiscono sulla semisfera:

- Forza peso verso il basso: $\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_y$
- Forza di sostegno verso l'alto esercitata dal piano orizzontale: $\boldsymbol{N} = mg\boldsymbol{e}_y$
- Forza di attrito orizzontale: $\boldsymbol{F}_a = -\mu_D N\boldsymbol{e}_x = -mg/4\boldsymbol{e}_x$
- Forza $\boldsymbol{F}$ di modulo incognito: $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$

Domanda 1

Poiché il moto è rettilineo uniforme, la forza risultante deve essere zero, da cui si trova $F = mg/4$.

Domanda 2

Il centro di massa del corpo si muove di moto rettilineo uniforme, e il corpo non ruota. Di conseguenza il suo momento angolare rispetto ad un polo fisso (qualsiasi) non cambia e il momento risultante di tutte le forze deve essere zero. Solo la componente z del momento e' non banale. Abbiamo una coppia di forze orizzontali (attrito e forza esterna)

$$\boldsymbol{M}_1 = -Fr\,(1-\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{1}{4}mgr\,(1-\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_z$$

e una coppia di forze verticali (reazione normale del piano e forza peso)

$$\boldsymbol{M}_2 = \frac{3}{8} mgr \sin\theta \boldsymbol{e}_z$$

quindi il momento totale vale

$$\boldsymbol{M} = \left(\frac{5}{8} mgr \sin\theta - \frac{1}{4} mgr\right) \boldsymbol{e}_z$$

che si annulla se $\sin\theta = 2/5$. Quindi $\theta = \arcsin(2/5)$.

Domanda 3

Poniamo la semisfera con la faccia piana sul piano orizzontale (capovolta). La quantità di massa disponibile a una quota z sara' proporzionale, oltre a dz, al raggio al quadrato del cerchio orizzontale corrispondente: $A = \pi\left(r^2 - z^2\right)$; questo è il peso del contributo della variabile z. Abbiamo quindi

$$z_{CM} = \frac{\int_0^r Azdz}{\int_0^r Adz} = \frac{\int \pi\left(r^2 z - z^3\right) dz}{\int \pi\left(r^2 - z^2\right) dz} = \frac{\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4}{r^3 - \frac{1}{3}r^3} = \frac{3}{8} r$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Al momento dell'esplosione il corpo era fermo, quindi eventuali componenti verticali di impulso sui due pezzi dovranno essere opposte, ma l'arrivo simultaneo a terra garantisce che ci siano solo le componenti orizzontali. Il centro di massa rimarrà sulla colonna verticale già percorsa in salita, quindi i vettori velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ subito dopo l'esplosione saranno orizzontali e opposti in verso. In particolare, per lasciare il centro di massa nel punto in cui avviene l'esplosione, deve valere: $\boldsymbol{v}_1 = -3\boldsymbol{v}_2$. D'altra parte è nota l'energia cinetica addizionale, per cui:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{24} m v_0^2$$

Le due equazioni precedenti permettono di calcolare $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ orizzontali, eccetto la loro direzione. Eliminando v_1 dall'energia troviamo

$$\frac{9}{8} v_2^2 + \frac{3}{8} v_2^2 = \frac{1}{24} v_0^2$$

e quindi $v_2 = v_0/6$ e $v_1 = v_0/2$ con direzioni uguali e opposte.

Domanda 2

Quando i due pezzi arrivano al suolo, conservano le loro velocità orizzontali e riacquistano la componente verticale (cambiata di segno) di modulo v_0. L'energia cinetica totale vale quella iniziale più quella guadagnata nell'esplosione

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{24}mv_0^2 = \frac{13}{24}mv_0^2$$

Domanda 3

La velocità relativa tra le due componenti rimane costante e orizzontale:

$$v_{rel} = v_1 + v_2 = \frac{2}{3}v_0$$

Il tempo di caduta, partendo con velocità verticale nulla, è $t_c = v_0/g$. La distanza d tra le posizioni di arrivo è data semplicemente dal prodotto:

$$d = v_{rel}t_c = \frac{2}{3}\frac{v_0^2}{g}$$

Soluzione terzo problema

Domanda 1

Dall'equazione di stato troviamo

$$T_1 = \frac{PV_1}{n_1R}$$
$$T_2 = \frac{PV_2}{n_2R}$$

da cui

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_1}\frac{n_2}{n_1}$$

Domanda 2

All'equilibrio, conservandosi l'energia interna, deve essere

$$\Delta U = n_1c_V\left(T_f - T_1\right) + n_2c_V\left(T_f - T_2\right)$$

da cui

$$T_f = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{n_1 R T_f}{V_1} \\ P_2 &= \frac{n_2 R T_f}{V_2} \end{aligned}$$

La forza vincolare necessaria a mantenere l'equilibrio sarà, in modulo,

$$|F| = A\,|P_2 - P_1| = ART_f \left| \frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V_2} \right|$$

Domanda 3

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= n_1 c_V \ln \frac{T_f}{T_1} + n_2 c_V \ln \frac{T_f}{T_2} \end{aligned}$$

Domanda 4

Operando con una macchina reversibile arriveremo ad uno stato finale con una temperatura T_f^* comune ai due gas. Quindi

$$\Delta S = n_1 c_V \ln \frac{T_f^*}{T_1} + n_2 c_V \ln \frac{T_f^*}{T_2}$$

ma operando reversibilmente (per rendere massimo il lavoro estratto) avremo $\Delta S = 0$, e quindi

$$T_f^* = T_1^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} T_2^{\frac{n_2}{n_1+n_2}}$$

La macchina termica avrà estratto dal corpo più caldo un calore

$$Q_1 = n_1 c_V \left(T_1 - T_f^*\right)$$

e ceduto al più freddo

$$Q_2 = n_2 c_V \left(T_f^* - T_2\right)$$

Il lavoro prodotto

$$W = Q_1 - Q_2 = n_1 c_V \left(T_1 - T_f^*\right) - n_2 c_V \left(T_f^* - T_2\right)$$