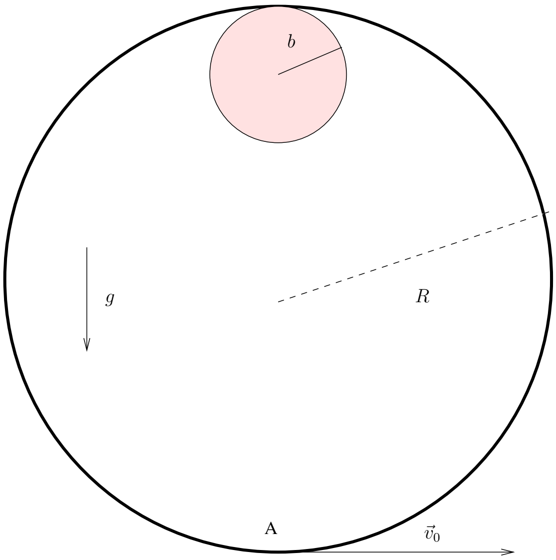
## 1.3. 21 gennaio 2010

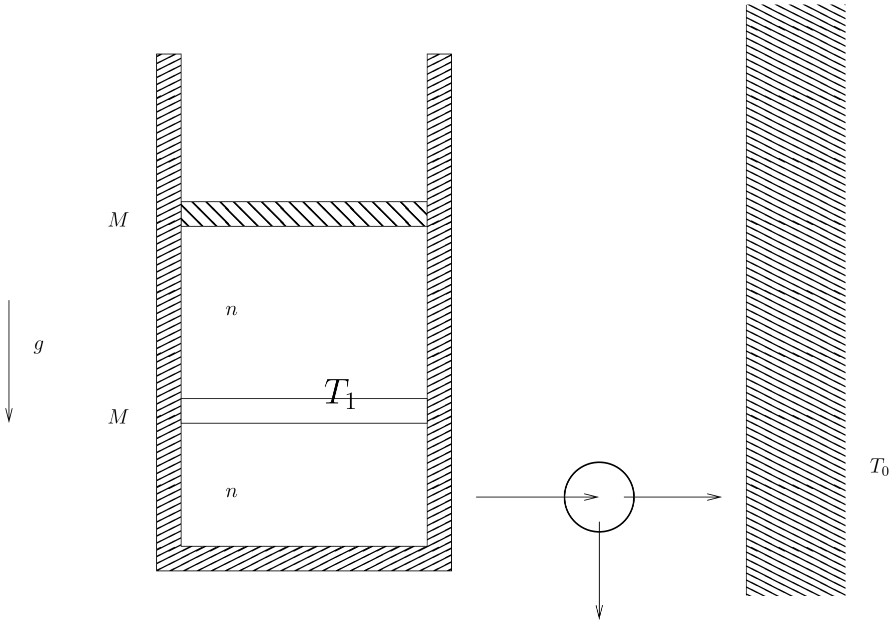
### Problema 1 (15 punti)




L'anello sottile in figura, di massa $M$ e raggio $R$, può ruotare senza strisciare su un perno circolare di raggio $b$ sul quale è appoggiato, ed inizialmente si trova con il centro di massa nella posizione più bassa possibile, mentre il suo estremo inferiore (indicato in figura con $A$) si muove con velocità $v_0$ in modulo.

1. Per quale valore minimo di $v_0$ il centro di massa dell'anello riesce a compiere un giro completo?
2. Dopo tale giro completo dove si trova $A$?
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

## Problema 2 (15 punti)




Il recipiente cilindrico in figura di sezione $S$ è diviso in due scomparti da dei setti scorrevoli senza attrito di massa $M$. Il setto intermedio permette scambi di calore, mentre recipiente e setto superiore sono termicamente isolanti. Ciascuno scomparto contiene $n$ moli di gas perfetto, ad una temperatura iniziale $T_1$. Si trascuri la pressione atmosferica esterna.

1. Calcolare il volume dei due scomparti.

2. Una macchina ciclica reversibile usa il sistema come sorgente calda, e come sorgente fredda un bagno termico di temperatura $T_0 < T_1$. Determinare il massimo lavoro estraibile.

3. Mentre il sistema è nello stato iniziale si raddoppia istantaneamente la forza di gravità. Determinare la temperatura finale, all'equilibrio termodinamico.

## Soluzione primo problema

### Domanda 1

Usiamo come coordinata l'angolo tra il segmento che congiunge il centro del perno al punto di contatto e la direzione verticale. Il centro di massa dell'anello compie un moto circolare attorno al centro del perno, di raggio $R - b$ e velocità angolare $\dot{\theta}$.

Detta $\omega$ la velocità angolare dell'anello, dovrà essere

$$R\omega = (R - b)\dot{\theta} \tag{1.3.1}$$

dato che esso ruota istante per istante attorno al punto di contatto. Potremo scrivere quindi l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \left( \frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}^2 - Mg\,(R-b)\cos\theta \tag{1.3.2}$$

Eguagliando l'energia iniziale a quella nell'istante in cui il centro di massa è nella posizione più alta troviamo

$$\frac{1}{2} I \left( \frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}_i^2 - Mg\,(R-b) = \frac{1}{2} I \left( \frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}_f^2 + Mg\,(R-b) \tag{1.3.3}$$

dove $I$ è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto e vale $I = 2MR^2$. Questo significa

$$\dot{\theta}_f^2 = \dot{\theta}_i^2 - \frac{4MgR^2}{I\,(R-b)} \tag{1.3.4}$$

D'altra parte dato che il centro di massa si muove di moto circolare dovremo

$$-M(R-b)\dot{\theta}_f^2 + Mg = -N < 0 \tag{1.3.5}$$

avere una accelerazione centripeta positiva

$$M\,(R-b)\,\dot{\theta}_f^2 - Mg = M\,(R-b)\,\dot{\theta}_i^2 - \frac{4M^2gR^2}{I} - Mg > 0 \tag{1.3.6}$$

e quindi

$$\theta_i^2 > \frac{3g}{(R-b)} \tag{1.3.7}$$

La velocità iniziale del punto $A$ vale

$$v_0 = 2R\omega_i = 2(R-b)\dot{\theta}_i \tag{1.3.8}$$

e quindi

$$\frac{v_0^2}{4\,(R-b)^2} > \frac{3g}{(R-b)} \tag{1.3.9}$$

ossia

$$v_0 > \sqrt{12g\,(R-b)} \tag{1.3.10}$$

## Domanda 2

In un giro completo $\theta$ varia di $2\pi$. Dalla relazione tra $\omega$ e $\dot{\theta}$ segue che il corpo rigido avrà ruotato di un angolo

$$\alpha = \frac{2\pi\,(R-b)}{R} \tag{1.3.11}$$

e quindi il punto $A$ si troverà ruotato dello stesso angolo rispetto alla posizione iniziale.

### Domanda 3

Sviluppando l'energia per piccoli valori di $\theta$ si trova

$$E = \frac{1}{2} I \left( \frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M g (R-b) \theta^2 \tag{1.3.12}$$

da cui segue che la frequenza delle piccole oscillazioni vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{M g (R-b) \frac{R^2}{I (R-b)^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2(R-b)}} \tag{1.3.13}$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

La pressione dello scomparto in alto vale $P_+ = Mg/S$, quella dello scomparto in basso $P_- = 2Mg/S$. Abbiamo quindi

$$V_{+,0} = \frac{nRT_1}{P_+} = \frac{nSRT_1}{Mg} \tag{1.3.14}$$

$$V_{-,0} = \frac{1}{2} V_{+,0} \tag{1.3.15}$$

### Domanda 2

Detto $Q_1$ il calore estratto dal sistema e $Q_0$ quello ceduto al bagno termico avremo per la variazione di entropia

$$\Delta S = \frac{Q_0}{T_0} + 2nc_p \log \frac{T_0}{T_1} = 0 \tag{1.3.16}$$

da cui

$$Q_0 = 2nc_p T_0 \log \frac{T_1}{T_0} \tag{1.3.17}$$

Invece dal primo principio abbiamo

$$-Q_1 = 2nc_p (T_0 - T_1) \tag{1.3.18}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_0 = 2nc_p (T_1 - T_0) \left[ 1 - \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_1}{T_0} \right] \tag{1.3.19}$$

### Domanda 3

L'energia del sistema si conserva, e vale

$$U = 2Mg \left( \frac{V_+ + V_-}{S} \right) + 2Mg \frac{V_-}{S} + 2nc_V T \tag{1.3.20}$$

dove $T$ è la temperatura del gas. Appena la gravità raddoppia i volumi e la temperatura hanno il valore iniziale, quindi

$$U = 2n\left(2R + c_V\right)T_1 \tag{1.3.21}$$

mentre nella condizione di equilibrio finale avremo

$$V_+ = \frac{nSRT}{2Mg} \tag{1.3.22}$$

$$V_- = \frac{1}{2}V_+ \tag{1.3.23}$$

e quindi

$$2n\left(2R + c_V\right)T_1 = 2n\left(R + c_V\right)T \tag{1.3.24}$$

da cui

$$T = \frac{2R + c_V}{R + c_V}T_1 \tag{1.3.25}$$