1.33. 30 Maggio 2016

Problema 1

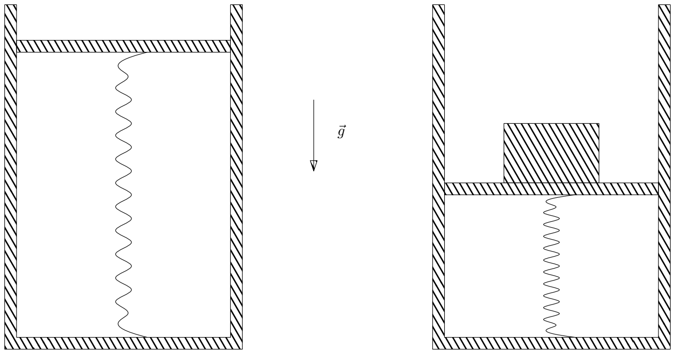

Figura 1.27.: Il recipiente cilindrico dl problema, nello stato di equilibrio iniziale e finale.

Un recipiente cilindrico, chiuso da un pistone scorrevole di sezione S e massa trascurabile, contiene una mole di un gas perfetto monoatomico e non permette trasmissione di calore. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla è fissata tra il fondo del recipiente e il pistone come in Figura 1.27. Inizialmente la temperatura del gas è T_0. All'esterno del recipiente c'è il vuoto.

1. Calcolare la pressione e il volume iniziale del gas.
2. Si pone una massa $M = g^{-1}\sqrt{kRT_0}$ sul pistone, e si attende il ristabilirsi dell'equilibrio termodinamico. Calcolare il volume finale del gas.
3. Considerando nuovamente il sistema nel suo stato iniziale, calcolare il massimo lavoro che è possibile ottenere avendo a disposizione una macchina termica e un bagno termico alla temperatura T_b.

Problema 2

Una guida parabolica liscia è descritta in coordinate cartesiane dall'equazione

$$y = \frac{x^2}{\ell}$$

dove ℓ è una costante positiva dalle opportune dimensioni. Una sbarretta sottile di lunghezza b e massa m è vincolata a muoversi con i due estremi fissati alla guida. Per descrivere la posizione della sbarretta si consiglia di utilizzare l'angolo θ che questa forma con la direzione orizzontale. Nel seguito interesserà il comportamento del sistema per $\theta \ll 1$.

1. Sotto quale condizione la posizione $\theta = 0$ è di equilibrio stabile?

2. Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione di una unica coordinata e della sua derivata.

3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione $\theta = 0$ se di equilibrio stabile.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Dall'equilibrio meccanico del pistone troviamo

$$P = k\frac{V}{S^2}$$

e inoltre

$$PV = RT$$

da cui

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{RS^2T}{k}} \\ P &= \sqrt{\frac{kRT}{S^2}} \end{aligned}$$

Ponendo $T = T_0$ otteniamo

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{RS^2T_0}{k}} \\ P_0 &= \sqrt{\frac{kRT_0}{S^2}} \end{aligned}$$

Domanda 2

Per la conservazione dell'energia del sistema gas+molla+massa abbiamo

$$U_0 = c_V T_f + \frac{k}{2}\frac{V_f^2}{S^2} + Mg\frac{V_f}{S}$$

con

$$\begin{aligned} U_0 &= c_V T_0 + \frac{k}{2}\frac{V_0^2}{S^2} + Mg\frac{V_0}{S} \\ &= \left(c_V + \frac{3}{2}R\right) T_0 \end{aligned}$$

Inoltre nello stato finale

$$P_f = k\frac{V_f}{S^2} + \frac{Mg}{S}$$

$$P_f V_f = k\left(\frac{V_f}{S}\right)^2 + Mg\frac{V_f}{S} = RT_f$$

Sostituendo troviamo, ponendo

$$x = \frac{V_f}{V_0} = \frac{V_f}{S}\sqrt{\frac{k}{RT_0}}$$

.

$$\left(\frac{c_V}{R} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{c_V}{R} + 1\right)x = \left(\frac{c_V}{R} + \frac{3}{2}\right)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado troviamo la soluzione positiva

$$x = \frac{-\gamma + \sqrt{4\gamma^2 + 2\gamma - 1}}{1 + \gamma} = \frac{3}{4}$$

dove la seconda uguaglianza è valida per un gas monoatomico. In conclusione

$$V_f = \frac{3}{4}V_0$$

Domanda 3

Detti Q_1 e Q_2 i calori ceduti al sistema e al bagno termico abbiamo

$$W = -Q_1 - Q_2$$

Ma per il sistema il calore fornito è uguale alla variazione dell'energia. Quest'ultima all'equilibrio si può scrivere nella forma

$$U = c_V T + \frac{1}{2}k\frac{V^2}{S^2} = \left(c_V + \frac{R}{2}\right)T$$

e quindi

$$Q_1 = \left(c_V + \frac{R}{2}\right)(T_b - T_0)$$

Operando reversibilmente deve essere

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_b} + c_V \log\frac{T_b}{T_0} + R\log\frac{V_f}{V_0} = 0$$

12 ma dato che $V/S = \sqrt{RT/k}$ otteniamo

$$Q_2 = -T_b \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \log \frac{T_b}{T_0}$$

e quindi

$$W = \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \left[T_b \log \frac{T_b}{T_0} - (T_b - T_0) \right]$$

Questa quantità non è mai negativa, infatti $W = 0$ per $T_b = T_0$ come è ovvio, inoltre

$$\frac{dW}{dT_b} = \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \log \frac{T_b}{T_0}$$

quindi la W è crescente per $T_b > T_0$ e decrescente per $T_b < T_0$.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Dette x_{cm}, y_{cm} le coordinate del centro di massa della sbarretta possiamo scrivere le coordinate degli estremi nella forma

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{cm} - \frac{b}{2} \cos \theta \\
y_1 &= y_{cm} - \frac{b}{2} \sin \theta \\
x_2 &= x_{cm} + \frac{b}{2} \cos \theta \\
y_2 &= y_{cm} + \frac{b}{2} \sin \theta
\end{aligned}$$

Imponendo che questi si trovino sulla guida, abbiamo

$$\begin{aligned}
y_{cm} - \frac{b}{2} \sin \theta &= \frac{1}{\ell} \left(x_{cm} - \frac{b}{2} \cos \theta \right)^2 \\
y_{cm} + \frac{b}{2} \sin \theta &= \frac{1}{\ell} \left(x_{cm} + \frac{b}{2} \cos \theta \right)^2
\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli troviamo

$$\begin{aligned}
y_{cm} - \frac{b}{2} \sin \theta &= \frac{1}{\ell} \left(x_{cm}^2 + \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta - x_{cm} b \cos \theta \right) \\
y_{cm} + \frac{b}{2} \sin \theta &= \frac{1}{\ell} \left(x_{cm}^2 + \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta + x_{cm} b \cos \theta \right)
\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$x_{cm} = \frac{\ell}{2}\tan\theta \simeq \frac{\ell}{2}\theta + O\left(\theta^3\right)$$

Sommando e sostituendo l'espressione precedente abbiamo infine

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}^2 + \frac{b^2}{4}\cos^2\theta\right) \\ &= \frac{\ell}{4}\left(\tan^2\theta + \frac{b^2}{\ell^2}\cos^2\theta\right) \\ &\simeq \frac{\ell}{4}\left(\frac{b^2}{\ell^2} + \theta^2 - \frac{b^2}{\ell^2}\theta^2\right) + O\left(\theta^4\right) \end{aligned}$$

L'energia potenziale della sbarretta è, a meno di una costante,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4}Mg\ell y_{cm} \\ &\simeq \frac{1}{4}Mg\ell\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)\theta^2 + O\left(\theta^4\right) \end{aligned}$$

ed ha un minimo per $\theta = 0$ quando $b < \ell$.

Domanda 2

L'energia cinetica della sbarretta si può scrivere nella forma

$$K = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Derivando le coordinate del centro di massa rispetto al tempo troviamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &\simeq \frac{\ell}{2}\dot{\theta} \\ \dot{y}_{cm} &\simeq 0 \end{aligned}$$

L'energia totale è quindi

$$E = \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mg\ell\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)\theta^2$$

Domanda 3

L'energia ottenuta precedentemente è quella di un oscillatore armonico con

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)}$$