1.35. 23 Settembre 2016

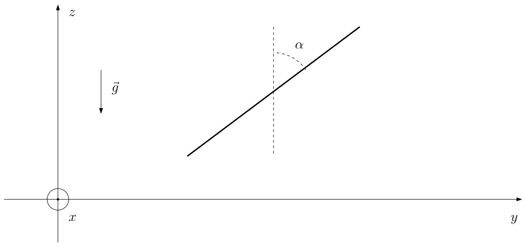

Figura 1.31.: L'asta in caduta libera.

Esercizio 1 Un'asta di massa m, lunghezza ℓ e momento di inerzia I si trova inizialmente in caduta verticale sotto l'azione di una forza gravitazionale costante $\vec{F} = -mg\hat{z}$. La massa non è distribuita uniformemente, ma il centro di massa si trova comunque nel punto medio dell'asta. Durante la caduta l'asta non ruota, e si trova nel piano $x = 0$, formando con la verticale un angolo α. Ad un certo istante un estremo dell'asta urta il piano rigido $z = 0$, ed in quel momento la velocità del centro di massa dell'asta è $\vec{v}_{cm} = -v_0\hat{z}$. Salvo che per l'ultima delle domande che seguono si può considerare l'urto elastico.

1. Calcolare la velocità angolare ω dell'asta dopo l'urto.
2. Come deve essere distribuita la massa sull'asta in modo da rendere minima in modulo ω?
3. Per quali valori di α, se esistono, il centro di massa è fermo immediatamente dopo l'urto?
4. Calcolare l'impulso applicato dal piano all'asta durante l'urto.
5. Se l'estremo che urta il piano resta vincolato ad esso, con l'asta libera di ruotare, quanto vale la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto?

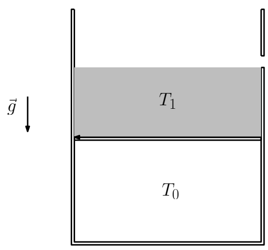

Figura 1.32.: Il recipiente descritto nell'esercizio, nella configurazione iniziale in presenza del foro.

Esercizio 2 Un recipiente cilindrico di sezione S è diviso in due scomparti da un setto mobile. Nello scomparto inferiore si trova una mole di un gas perfetto monoatomico, in quello superiore una massa m di liquido di densità ρ. Sia il recipiente che il setto non permettono il passaggio di calore. Sul liquido agisce la pressione atmosferica P_a.

Sapendo che il sistema è inizialmente in equilibrio, che il gas si trova ad una temperatura T_0 e il liquido ad una temperatura T_1

1. Calcolare il volume occupato dal gas.
2. Calcolare il lavoro massimo che è possibile estrarre dal sistema con una macchina termica ciclica che utilizzi il gas e il liquido come sorgenti. Si consideri costante la capacità termica del liquido C, e si trascurino gli scambi di calore tra questo e l'atmosfera.
3. Se nello scomparto superiore è praticato un foro laterale, all'altezza del livello iniziale del liquido, calcolare il calore minimo necessario da fornire al gas per far fuoriuscire tutto il liquido.

Soluzioni

Domanda 1.1 Si conserva la quantità di moto orizzontale, il momento angolare rispetto al punto di contatto e l'energia. Quindi

$$\begin{aligned}
0 &= mv_x \\
-mv_0\frac{\ell}{2}\sin\alpha &= mv_y\frac{\ell}{2}\sin\alpha - mv_x\frac{\ell}{2}\cos\alpha + I\omega \\
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}$$

Da cui $v_x = 0$ e

$$\begin{aligned}
v_0^2 - v_y^2 &= \frac{I\omega^2}{m} \\
v_0 + v_y &= -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Dividendo membro a membro otteniamo

$$v_0 - v_y = -\frac{\ell\omega\sin\alpha}{2} \tag{1.35.1}$$

$$v_0 + v_y = -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha} \tag{1.35.2}$$

e sommando membro a membro troviamo

$$\omega = -\frac{4v_0}{\ell}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}}$$

Domanda 1.2 Per rendere minimo in modulo ω si deve avere il più grande valore possibile di I compatibile con i vincoli del problema. Quindi si deve distribuire la massa sugli estremi, metà per parte per avere il centro di massa nel punto medio dell'asta. In questo caso

$$I = m\frac{\ell^2}{4}$$

e quindi

$$\omega = -\frac{4v_0}{\ell}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + 1}$$

Domanda 1.3 Ponendo $v_y = 0$ nelle equazioni precedenti abbiamo

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{\ell\omega\sin\alpha}{2} \\ v_0 &= -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha} \end{aligned}$$

e dividendo membro a membro ($\sin\alpha \neq 0$) troviamo

$$\sin^2\alpha = \frac{4I}{m\ell^2} < 1$$

Il caso $I = 0$ va trattato a parte, e si vede immediatamente che non ammette soluzioni.

Domanda 1.4 Calcoliamo la velocità del centro di massa dopo l'urto, sottraendo membro a membro le equazioni (1.35.1) e (1.35.2):

$$\begin{aligned} v_y &= \left(\frac{m\ell^2\sin^2\alpha - 4I}{4m\ell\sin\alpha}\right)\omega \\ &= -v_0\frac{\sin^2\alpha - \frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}} \end{aligned}$$

Dato che l'impulso trasferito è uguale alla variazione della quantità di moto del sistema

$$\begin{aligned} J &= -mv_0\frac{\sin^2\alpha - \frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}} + mv_0 \\ &= \left(\frac{\frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}}\right)2mv_0 \end{aligned}$$

Domanda 1.5 In questo caso l'unica quantità conservata è il momento angolare rispetto al punto di contatto. Quindi

$$-mv_0\frac{\ell}{2}\sin\alpha = \left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\omega$$

da cui

$$\omega = -\frac{\frac{2v_0}{\ell}}{1+\frac{4I}{m\ell^2}}\sin\alpha$$

Domanda 2.1 La pressione è data da

$$P_0 = \frac{mg}{S} + P_a$$

e quindi

$$V_0 = \frac{RT_0}{\frac{mg}{S} + P_a}$$

Domanda 2.2 Durante la trasformazione il gas rimane a pressione costante. Detto dQ_1 il calore ad esso fornito e dQ_2 quello fornito al liquido potremo scrivere il lavoro prodotto dalla macchina come

$$dW = -dQ_1 - dQ_2$$

ma

$$dQ_1 = c_P dT$$

Per il liquido

$$dQ_2 = dU + P_2 S d\ell_2 - P_1 S d\ell_1$$

dove P_2 è la pressione alla superficie superiore e P_1 quella alla superficie inferiore, ℓ_2 e ℓ_1 i corrispondenti livelli. Ma dato che $P_2 - P_1 = -mg/S$ e $dU = CdT + mgdh$, dove $h = (\ell_1 + \ell_2)/2$, abbiamo ($d\ell_2 = d\ell_1 = dh = dV/S$)

$$\begin{aligned} dQ_2 &= CdT + (mg + P_2 S - P_1 S)\frac{dV}{S} \\ &= CdT \end{aligned}$$

Integrando fino alla temperatura finale abbiamo

$$W = c_P (T_0 - T_f) + C(T_1 - T_f)$$

Per determinare la temperatura finale imponiamo la reversibilità. Abbiamo

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ_1}{T} + \frac{dQ_2}{T'} \\ &= C\frac{dT'}{T'} + c_P\frac{dT}{T} = 0 \end{aligned}$$

e integrando troviamo

$$T_f = T_1^{\frac{C}{C+c_P}} T_0^{\frac{c_P}{C+c_P}}$$

Domanda 2.3 Dal primo principio applicato al gas abbiamo

$$dQ = c_V dT + PdV$$

Ma la pressione del gas è funzione del suo volume:

$$P = P_a + \rho g h$$

L'altezza del liquido è una funzione lineare del volume del gas

$$h = \frac{P_0 - P_a}{\rho g} - \frac{V - V_0}{S}$$

e quindi

$$dQ = c_V dT + \left(P_0 - \rho g \frac{V - V_0}{S}\right) dV$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} Q &= c_V \left(T^* - T_0\right) + P_0 \Delta V - \frac{\rho g}{2S} \Delta V^2 \\ &= c_V \left(T^* - T_0\right) + \left(\frac{mg}{S} + P_a\right) \Delta V - \frac{\rho g}{2S} \Delta V^2 \end{aligned}$$

dove ΔV è il volume del liquido

$$\Delta V = \frac{m}{\rho}$$

La temperatura finale del gas è data da

$$T^* = \frac{P_a \left(V_0 + \Delta V\right)}{R}$$

Quindi

$$Q = \frac{m}{\rho} \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) P_a - \frac{c_V T_0}{1 + \frac{S P_a}{mg}} + \frac{m^2 g}{2 \rho S}$$