1.36. 16 Gennaio 2017

Primo problema (15 punti)

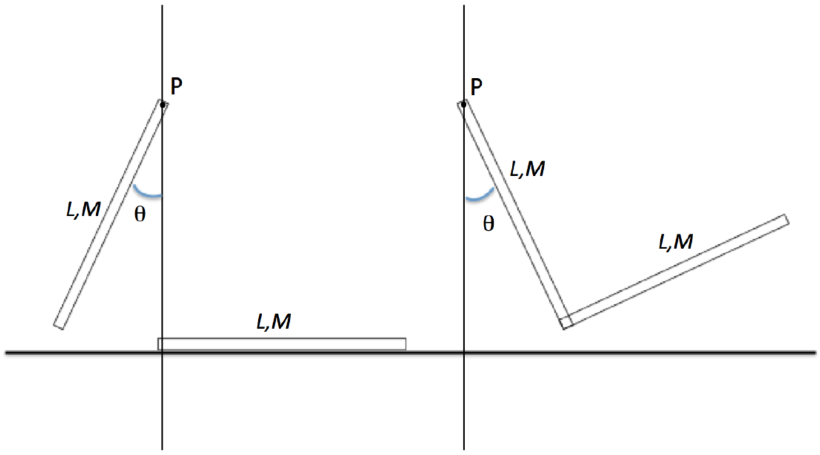

Figura 1.33.: Le aste prima dell'urto (a sinistra) e la struttura a L (a destra).

Un'asta omogenea di lunghezza L e massa M è appesa per un estremo e può oscillare liberamente.

Quando arriva nella posizione verticale il suo estremo libero si incastra nell'estremo di un'altra sbarra della stessa lunghezza e massa, inizialmente orizzontale, formando con esse un profilo rigido a forma di L. Il piano orizzontale sul quale appoggiava la seconda sbarra viene rimosso e da quel momento la struttura è libera di oscillare.

1. Se la prima asta parte dalla posizione orizzontale, quale è la velocità angolare con la quale il profilo ad L si mette in moto subito dopo l'urto?

2. Trovare il valore assoluto massimo raggiunto dall'angolo θ (definito in Figura 1.33) durante il moto successivo.

3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema rispetto alla sua posizione di equilibrio stabile.

Secondo problema (15 punti)

Un recipiente munito di pistone scorrevole contiene n moli di un gas perfetto monoatomico, ed una massa M di ghiaccio ad una temperatura iniziale $T_0 < T_f$, dove T_f è la temperatura di fusione. Ghiaccio e gas sono in equilibrio termodinamico, e la pressione del gas è P_0. Recipiente e pistone sono impermeabili al calore.

1. Si fa compiere al sistema una compressione adiabatica reversibile, che viene interrotta non appena tutto il ghiaccio si è sciolto. Calcolare il lavoro fatto sul sistema e la pressione finale.

2. Partendo dalla stessa condizione iniziale si applica bruscamente una forza esterna al pistone, che viene scelta in modo tale da raggiungere uno stato finale di equilibrio dove $T = T_f$ e tutto il ghiaccio si è sciolto. Calcolare la pressione finale.

3. Nei due casi considerati calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzioni

Domanda 1.1 Dato che durante l'urto l'unica forza impulsiva esterna è la reazione vincolare in P, si conserva il relativo momento angolare. La velocità angolare dell'asta libera immediatamente prima dell'urto si trova utilizzando la conservazione dell'energia:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}$$

dove $I = ML^2/3$ è il momento di inerzia di questa rispetto a P. Quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Il momento angolare prima dell'urto è

$$L_1 = I\omega_1 = \sqrt{\frac{gM^2L^3}{3}}$$

e dopo l'urto

$$L_2 = I_L\omega_2$$

dove $I_L = I + I'$ è il momento di inerzia della struttura ad L. Utilizzando il teorema di Steiner calcoliamo il momento di inerzia della seconda sbarra, sempre rispetto a P,

$$I' = M\frac{L^2}{12} + M\left(\frac{L^2}{4} + L^2\right) = \frac{4}{3}ML^2$$

da cui

$$I_L = \frac{5}{3}ML^2$$

Ponendo $L_1 = L_2$ otteniamo infine

$$\omega_2 = \frac{I}{I_L}\omega_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Domanda 1.2 Applicando la conservazione dell'energia dopo l'urto otteniamo

$$\frac{1}{2}I_L\omega_2^2 - Mg\frac{L}{2} - MgL = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta + Mg\left[-L\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\theta\right]$$

da cui

$$\frac{1}{5} = 3 - 3\cos\theta + \sin\theta$$

Ponendo $t = \tan\frac{\theta}{2}$ otteniamo

$$\frac{29}{5}t^2 + 2t - \frac{1}{5} = 0$$

e quindi le due soluzioni

$$t = \frac{1}{29}\left(-5 \pm 3\sqrt{6}\right)$$

La soluzione negativa è quella in valore assoluto maggiore, e corrisponde al valore di θ cercato, che viene raggiundo quando la struttura si ferma per la seconda volta. L'angolo corrispondente è

$$\theta = 2\arctan t = -0.26\pi$$

L'altra soluzione corrisponde al valore raggiunto la prima volta che la struttura si ferma, e vale

$$\theta = 0.05\pi$$

Domanda 1.3 Utilizzando l'espressione precendente dell'energia scritta per un angolo generico

$$E = \frac{1}{2}I_L\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\left(\sin\theta - 3\cos\theta\right)$$

troviamo il valore di θ corrispondente alla posizione di equilibrio stabile, che corrisponde al minimo dell'energia potenziale

$$U(\theta) = \frac{1}{2}MgL\left(\sin\theta - 3\cos\theta\right)$$

cioè alla soluzione di

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{1}{2}MgL\left(\cos\theta + 3\sin\theta\right) = 0$$

ossia

$$\tan\theta_0 = -\frac{1}{3}$$

Introduciamo adesso una nuova coordinata, corrispondente a una piccola variazione rispetto alla posizione di equilibrio:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon$$

In termini di questa il potenziale si scrive

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[\sin\left(\theta_0+\varepsilon\right) - 3\cos\left(\theta_0+\varepsilon\right)\right]$$

ed espandendo al secondo ordine troviamo

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\theta_0\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\theta_0\right)\right]\varepsilon^2$$

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\theta_0 - 3\cos\theta_0 + 3\varepsilon\sin\theta_0 + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos\theta_0 + o\left(\varepsilon^2\right)\right]$$

Il termine lineare in ε si annulla nella posizione di equilibrio e a meno di una costante irrilevante otteniamo

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{3}{2}\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0\right]\varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{\frac{3}{2}\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0}{\sqrt{\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0}}\right]\varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\tan\theta_0}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}}\right]\varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{2}MgL\sqrt{\frac{5}{2}}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

L'energia nella approssimazione di piccole oscillazioni si scrive quindi

$$E = \frac{1}{2}I_L\dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2}MgL\sqrt{\frac{5}{2}}\varepsilon^2$$

e corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MgL}{I_L}\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{g}{L}}$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere direttamente osservando che abbiamo a che fare con un pendolo fisico con momento di inerzia I_L, massa totale $2M$ e distanza tra punto di sospensione e centro di massa uguale a

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}L$$

Di conseguenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Mgd}{I_L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{g}{L}}$$

Domanda 2.1 Il lavoro fatto sul sistema corrisponde alla variazione della sua energia interna, dato che la trasformazione è adiabatica. Quindi

$$W = (nc_V + Mc)(T_f - T_0) + \lambda M$$

dove λ è il calore latente di fusione.

Per una trasformazione adiabatica $dQ = 0$. Fino a quando non viene raggiunta la temperatura di fusione si ha

$$0 = (nc_V + Mc)\, dT + PdV$$

ed usando la legge dei gas perfetti

$$0 = (nc_V + Mc)\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

Integrando otteniamo

$$(nc_V + Mc)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{V_0} = 0$$

oppure, in termini del rapporto tra le pressioni,

$$(nc_P + Mc)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{P_0}{P_1} = 0$$

dove P_1 e V_1 sono i valori della pressione e del volume quando il ghiaccio inizia a sciogliersi. Quindi

$$P_1 = P_0\left(\frac{T_f}{T_0}\right)^{\Gamma}$$

dove

$$\Gamma = \frac{nc_P + Mc}{nR}$$

Durante lo scioglimento del ghiaccio il gas subisce una trasformazione isoterma. Il lavoro fatto dal gas deve quindi essere uguale al calore ceduto al ghiaccio:

$$\int PdV = -\lambda M$$

quindi, dato che

$$dV = -\frac{nRT_f}{P^2}dP$$

abbiamo

$$nRT_f\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = \lambda M$$

ossia

$$P_2 = P_1 e^{\frac{\lambda M}{nRT_f}}$$

dove P_2 è la pressione finale cercata. In conclusione

$$P_2 = P_0 \left(\frac{T_f}{T_0}\right)^{\Gamma} e^{\frac{\lambda M}{nRT_f}}$$

Domanda 2.2 Il volume iniziale è

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$$

e detto V' il volume finale, abbiamo un lavoro fatto sul sistema uguale a

$$W = P'\left(V_0 - V'\right)$$

dove P' è la pressione finale, legata alla forza esterna applicata. Questo deve essere uguale alla variazione dell'energia interna, e quindi

$$P'\left(V_0 - V'\right) = \left(nc_V + cM\right)\left(T_f - T_0\right) + \lambda M$$

Utilizzando la legge dei gas perfetti troviamo

$$nRP'\left(\frac{T_0}{P_0} - \frac{T_f}{P'}\right) = \left(nc_V + cM\right)\left(T_f - T_0\right) + \lambda M$$

e risolvendo otteniamo la pressione finale

$$P' = P_0\left[\left(\frac{nc_V + cM}{nR}\right)\left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) + \frac{\lambda M}{nRT_0} + \frac{T_f}{T_0}\right]$$

Domanda 2.3 Nel primo caso la variazione di entropia è nulla, dato che il sistema compie una trasformazione adiabatica reversibile. Nel secondo caso abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{ghiaccio}$$

dove

$$\begin{aligned}
\Delta S_{gas} &= nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V'}{V_0} \\
&= nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{T_f}{T_0}\frac{P_0}{P'} \\
&= nc_p \log\frac{T_f}{T_0} - nR\log\left[\left(\frac{nc_V + cM}{nR}\right)\left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) + \frac{\lambda M}{nRT_0} + \frac{T_f}{T_0}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta S_{ghiaccio} &= cM \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} + \frac{\lambda M}{T_f} \\ &= cM \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{\lambda M}{T_f}\end{aligned}$$

Dato che la trasformazione è irreversibile sarà $\Delta S > 0$.

