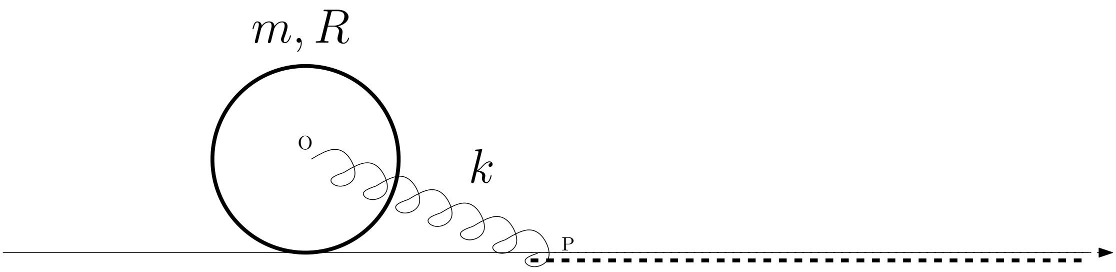
1.4. 23 giugno 2010

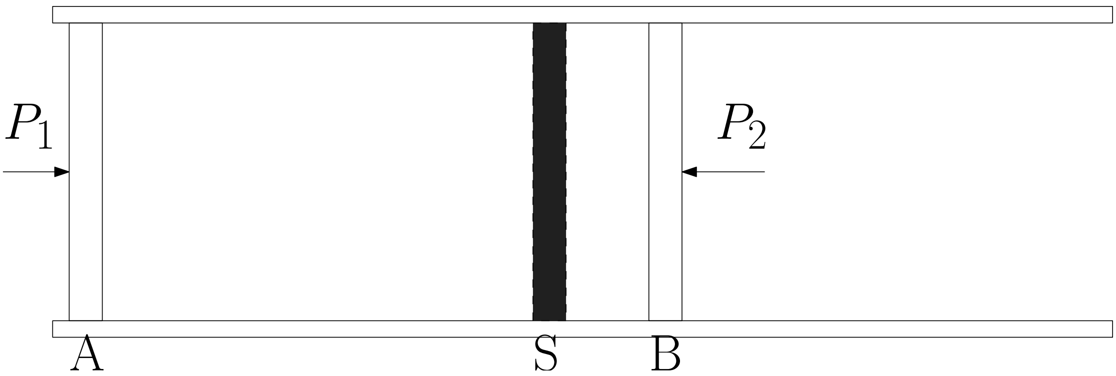
Problema 1



Un cilindro di massa m e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale, e il suo centro O è collegato ad un punto P del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente il punto di appoggio del cilindro si trova a sinistra di P, ad una distanza a da esso. Nella regione a sinistra di P non vi sono attriti, mentre a destra di P il cilindro è vincolato a rotolare senza strisciare. Il cilindro è inizialmente fermo.

1. Determinare la velocità angolare del cilindro e quella del suo centro di massa quando il punto di contatto arriva in P (immediatamente prima).
2. Determinare il massimo allontanamento successivo del punto di contatto da P.
3. Sempre supponendo che il centro di massa del cilindro sia inizialmente immobile, trovare se possibile una velocità angolare iniziale ω_0 per la quale il cilindro ritorna nel punto di partenza dopo una oscillazione completa.

Problema 2



Un certo fluido è descritto dalle equazioni di stato

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{U}{V} \\
T &= 3B\left(\frac{1}{n}\frac{U^2}{V}\right)^{1/3}
\end{aligned}
$$

dove B è una costante positiva e P, V, T, U, n hanno il significato usuale.

1. Rappresentare un ciclo di Carnot nel piano $P-V$, dopo avere determinato le necessarie leggi di dipendenza della pressione dal volume.

2. Determinare l'entropia del fluido in funzione di P, V ed n.

3. n moli del fluido vengono poste inizialmente nello scomparto a sinistra in figura, ad una temperatura T_1. Sul pistone A agisce una pressione esterna costante P_1, che spinge il fluido nello scomparto a destra attraverso un setto poroso S intermedio. Durante tutto il processo sul pistone B agisce una pressione costante $P_2 < P_1$. Determinare la temperatura finale del fluido dopo che questo è completamente passato a destra, e si è raggiunto nuovamente l'equilibrio termodinamico.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Le forze che agiscono sul cilindro sono quelle della molla e la forza peso (applicate al centro) e la reazione vincolare al punto di appoggio. Nessuna di queste ha momento rispetto al centro di massa, quindi il momento angolare rispetto ad esso (e quindi la velocità angolare) rimangono nulle.

Per quanto riguarda la velocità del centro di massa immediatamente a sinistra di P, $v_{cm,0}$, applichiamo la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\left(a^2+R^2\right)=\frac{1}{2}mv_{cm,0}^2+\frac{1}{2}kR^2$$

da cui troviamo

$$v_{cm,0}=a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Domanda 2 Nel passaggio dal punto all'immediata sinistra a quello all'immediata destra di P si conserva il momento angolare del cilindro, valutato rispetto al punto di contatto. Questo perchè nessuna delle forze esterne (forza peso, forza della molla, reazione del piano) ha momento rispetto a P. Abbiamo quindi

$$-mv_{cm,0}R=I\omega_1$$

dove ω_1 è la velocità angolare del cilindro immediatamente a destra di P e $I=\frac{3}{2}mR^2$ il suo momento di inerzia (sempre relativo a P). Quindi

$$\omega_1=-\frac{mR}{I}v_{cm,0}=-\frac{2}{3}\frac{v_{cm,0}}{R}=-\frac{2}{3}\frac{a}{R}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da questo momento si conserva l'energia, il massimo allontanamento ℓ si può determinare quindi scrivendo

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{k}{2}R^2=\frac{k}{2}\left(R^2+\ell^2\right)$$

ossia

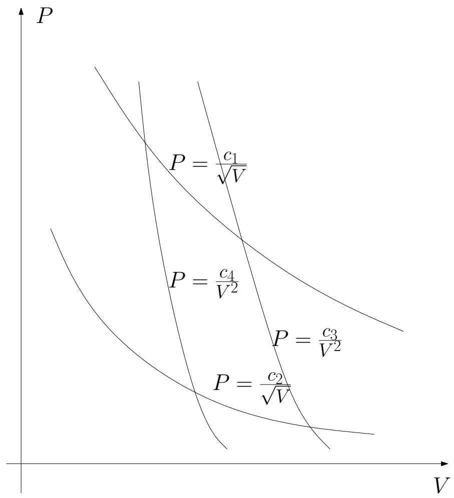
$$\ell = \sqrt{\frac{I}{k}}\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Domanda 3 Quando arriva alla immediata sinistra di P il centro di massa del cilindro avrà la velocità $v_{cm,0}$ determinata precedentemente. Per tornare al punto di partenza è necessario che non perda energia nel passaggio all'immediata destra. Questo accade se la reazione vincolare non compie lavoro, cioè se il punto di contatto è istantaneamente immobile. Quindi immediatamente a sinistra di P il cilindro deve essere già in condizioni di puro rotolamento, e questo accadrà se

$$\omega_0 = -\frac{v_{cm,0}}{R}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1



Ricavando l'energia dalla prima equazione di stato e sostituendo nella seconda troviamo

$$T = 3B\left(\frac{1}{n}P^2V\right)^{1/3}$$

quindi in un'isoterma

$$P^2V = n\left(\frac{T}{3B}\right)^3 = \text{costante}$$

In un'adiabatica abbiamo

$$dQ = dU + PdV = 0$$

e quindi

$$d\left(PV\right) + PdV = 2PdV + VdP = 0$$

Da questo segue che

$$2\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

e integrando

$$PV^2 = \text{costante}$$

Per il ciclo di Carnot abbiamo quindi la rappresentazione in figura.

Domanda 2 Il differenziale dell'entropia si può scrivere

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{VdP + 2PdV}{P^{2/3}V^{1/3}}\right) \\ &= \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}}dP + 2\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}}dV\right) \end{aligned}$$

ma dato che

$$dS = \frac{\partial S}{\partial P}dP + \frac{\partial S}{\partial V}dV$$

deve essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial P} &= \frac{1}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}} \\ \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{2}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}} \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione otteniamo

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}V^{2/3}P^{1/3} + A(V)$$

dove A è una funzione incognita del volume. Se integriamo la seconda troviamo invece

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}P^{1/3}V^{2/3} + B(P)$$

dove B è una funzione incognita della pressione. Confrontando troviamo che deve essere $A(V) = B(P) = C$ con C costante. Quindi

$$S = \frac{1}{B}\left(nPV^2\right)^{1/3} + C$$

In accordo con quanto determinato precedentemente, vediamo che in una adiabatica reversibile l'entropia non cambia.

Domanda 3 Dal primo principio segue che

$$U_2 = U_1 + P_1V_1 - P_2V_2$$

quindi le entalpie dello stato iniziale e di quello finale sono le stesse. Per il fluido considerato

$$H = U + PV = 2PV$$

e quindi

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

D'altra parte dalle equazioni di stato segue che

$$PV = \frac{n}{P}\left(\frac{T}{3B}\right)^3$$

e quindi

$$\frac{n}{P_1}\left(\frac{T_1}{3B}\right)^3 = \frac{n}{P_2}\left(\frac{T_2}{3B}\right)^3$$

cioè

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/3}$$