1.42. 7 ottobre 2017

Problema 1

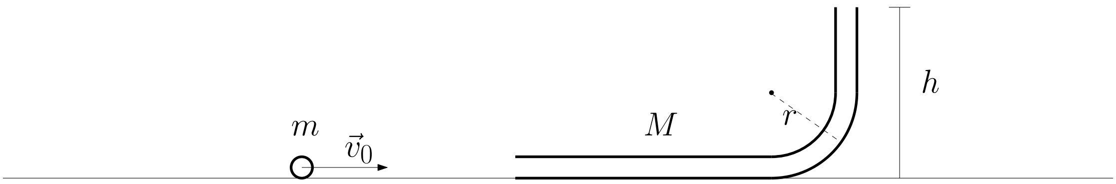

Figura 1.40.: Il sistema descritto nel problema.

Su un piano orizzontale è appoggiata una guida curva come in Figura 1.40, ottenuta congiungendo due tratti rettilinei con un quarto di circonferenza di raggio r. La guida ha una massa totale M ed è vincolata in modo che la parte a contatto con il piano orizzontale non si possa staccare. Una massa m viene lanciata verso la guida con velocità iniziale $\vec{v}_0$, ed entra in essa. Tra piano orizzontale e guida e tra piano orizzontale e massa non c'è attrito mentre ci può essere attrito tra la guida e la massa.

1-a. Trovare eventuali quantità conservate giustificando la risposta.

1-b. Si osserva che per un certo modulo della velocità iniziale v_1 la massa arriva all'altra estremità della guida con componente verticale della velocità nulla. Calcolare la componente orizzontale.

D'ora in poi si può supporre che non vi sia attrito tra guida e massa.

2-a. Trovare eventuali quantità conservate giustificando la risposta.

2-b. Calcolare il minimo modulo della velocità iniziale v_{min} che permetta alla massa di uscire dall'altra estremità della guida. Quanto vale la componente orizzontale della velocità della massa al momento della fuoriuscita?

3. Preso $|\vec{v}_0| = v_3 > v_{min}$ calcolare la massima altezza (dal piano orizzontale) raggiunta dalla massa.

Problema 2

Un recipiente cilindrico di sezione S e impermeabile al calore viene chiuso da un pistone, pure impermeabile al calore e collegato al fondo del recipiente da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. All'interno del recipiente si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico mentre la pressione esterna è trascurabile.

1. Inizialmente il sistema si trova all'equilibrio a una temperatura T_0. Calcolare la pressione e il volume totale occupato dal gas.

2. Si applica ora al pistone una forza orizzontale di modulo F e si attende che si ristabilisca l'equilibrio grazie agli attriti interni. Calcolare la nuova temperatura.

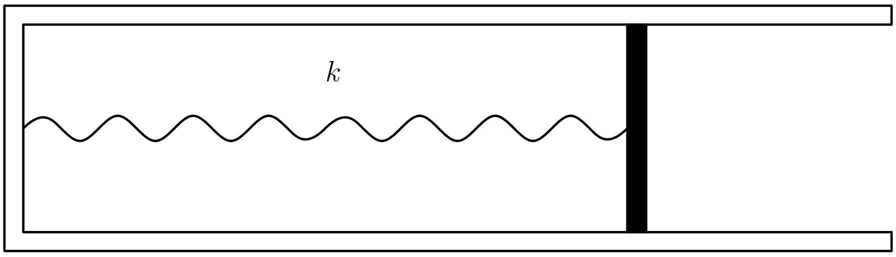

Figura 1.41.: Il cilindro con il pistone e la molla descritti nel problema.

3. Calcolare di quanto è cambiata l'entropia del sistema.

Soluzioni Problema 1

Domanda 1.a

Dato che non si ha attrito tra piano orizzontale e guida e tra piano orizzontale e massa tutte le forze esterne applicate al sistema massa+guida sono verticali. Si conserva quindi la quantità di moto orizzontale del sistema.

Domanda 1.b

Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale segue che

$$mv_1 = (m+M)v_f$$

dove v_f è la velocità finale orizzontale comune alla massa e alla guida. Quindi

$$v_f = \frac{m}{m+M}v_1$$

Domanda 2.a

Per le considerazioni fatte nella prima domanda la quantità di moto orizzontale del sistema si conserva ancora. In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica totale, inserendo in essa l'energia potenziale gravitazionale della massa.

Domanda 2.b

Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa si trova

$$\frac{1}{2}\mu v_{min}^2 = mgh$$

dove μ è la massa ridotta del sistema,

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

Di conseguenza

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2mgh}{\mu}} = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Al momento della fuoriuscita le velocità orizzontali di guida e massa sono uguali. Per la conservazione della quantità di moto orizzontale si trova, analogamente ai casi precedenti,

$$v_{orizzontale} = \frac{m}{m+M} v_{min}$$

Domanda 3

In questo caso

$$\frac{1}{2}\mu v_3^2 = mgh'$$

dove h' è l'altezza massima raggiunta, che vale quindi

$$h' = \frac{\mu v_3^2}{2mg}$$

Soluzioni Problema 2

Domanda 1

Preso come positivo il verso da sinistra a destra abbiamo per l'equilibrio meccanico del pstone

$$P_0 S - k\frac{V_0}{S} = 0$$

e dalla equazione dei stato dei gas perfetti

$$P_0 V_0 = nRT_0$$

Troviamo quindi

$$P_0 = \frac{1}{S}\sqrt{nkRT_0}$$
$$V_0 = S\sqrt{\frac{nRT_0}{k}}$$

Domanda 2

Usando il primo principio e tenendo conto che non si ha scambio di calore con l'esterno abbiamo

$$\Delta U = W$$

dove W è il lavoro fatto sul sistema. Includendo nel sistema anche la molla possiamo scrivere esplicitamente

$$\frac{k}{2S^2}\left(V_f^2 - V_0^2\right) + nc_V\left(T_f - T_0\right) = \frac{F}{S}\left(V_f - V_0\right)$$

Dalla legge dei gas perfetti e dalle condizioni di equilibrio meccanico per il pistone troviamo

$$\begin{aligned} V_f P_f &= \left(k\frac{V_f^2}{S^2} - \frac{F}{S}V_f\right) = nRT_f \\ V_0 P_0 &= \frac{k}{S^2}V_0^2 = nRT_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{k}{2S^2}\left(V_f^2 - V_0^2\right) + \frac{c_V}{R}\left(k\frac{V_f^2}{S^2} - \frac{k}{S^2}V_0^2 - \frac{F}{S}V_f\right) = \frac{F}{S}\left(V_f - V_0\right)$$

Questa è una equazione di secondo grado per V_f

$$V_f^2 - \frac{2FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1}V_f + \frac{2FS}{k}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0 - V_0^2 = 0$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1} + \sqrt{\left(\frac{FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2 + V_0^2 - \frac{2FS}{k}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0} \\ &= V_k + \sqrt{V_k^2 + V_0^2 - \frac{4}{5}V_kV_0} \end{aligned}$$

dove si è posto

$$V_k = \frac{5}{7}\frac{FS}{k}$$

Di conseguenza la temperatura, sostituendo in

$$T_f = \frac{k}{nRS^2}\left(V_f - \frac{7}{5}V_k\right)V_f$$

Domanda 3

La variazione di entropia si può ottenere dalla espressione generale

$$\Delta S = nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0}$$

ed è positiva, dato che la trasformazione considerata è irreversibile.