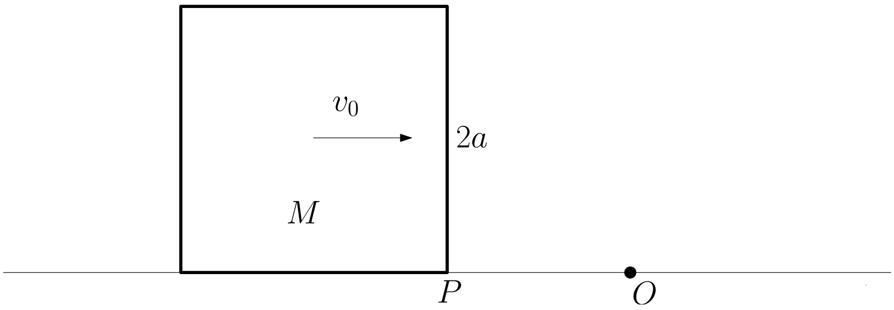
1.5. 14 luglio 2010

Problema 1



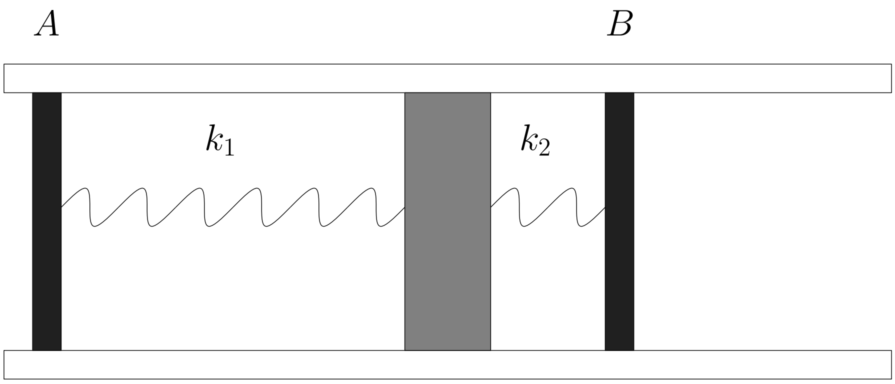
Il cubo in figura di lato $2a$ e massa M si muove con velocità iniziale v_0 su un piano privo di attrito. Può ruotare liberamente attorno al suo spigolo P, ma quest'ultimo non può staccarsi dal piano orizzontale. Nel punto O si trova un ostacolo che impedisce il passaggio di P.

1. Nell'ipotesi che P rimanga fissato ad O trovare una quantità conservata durante l'urto e calcolarne il valore immediatamente dopo questo. La quantità scelta continua a conservarsi anche successivamente?

2. Nella stessa ipotesi della domanda precedente, per quale valore di minimo di v_0 il cubo si capovolge in avanti.

3. Determinare le componenti della velocità del centro di massa del cubo immediatamente dopo l'urto.

Problema 2



Il cilindro in figura, di sezione S, è diviso un due parti da un setto intermedio poroso e chiuso da ambo i lati da pistoni mobili (A e B), collegati al setto intermedio da due molle di costanti elastiche k_1, k_2 e lunghezza a riposo nulla. Recipiente e pistoni sono impermeabili al calore. Inizialmente n moli di gas perfetto si trovano nello scomparto a sinistra, in equilibrio meccanico con il pistone ad una temperatura T_1, mentre il pistone B viene mantenuto aderente al setto poroso.

1. Determinare il volume dello scomparto a sinistra.
2. Si libera il pistone B, e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Determinare la temperatura finale del gas.
3. Determinare la variazione di entropia nel processo precedente.

Soluzione

Domanda 1 Scegliendo come polo il punto O, vediamo che durante l'urto le uniche forze rilevanti sono quelle impulsive applicate in esso. Quindi non si hanno momenti impulsivi rispetto ad O, e il momento angolare si conserva. Dato che inizialmente il cubo non ruota si ha

$$\vec{L} = -Mv_0 a\hat{z}$$

con $\hat{z}$ scelto uscente dal piao della figura. Successivamente L non si conserva, poichè la forza di gravità ha momento non nullo rispetto ad O.

Domanda 2 Usando la conservazione di L determiniamo la velocità angolare ω_0 del cubo immediatamente dopo l'urto. Si ha

$$L = -Mv_0 a = I\omega_0$$

dove I è il momento di inerzia del cubo rispetto a P. Dato che da questo momento si conserva l'energia, affinchè il cubo si capovolga deve essere

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mga > Mga\sqrt{2}$$

cioè

$$\omega_0^2 > \frac{2Mga}{I}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

e quindi

$$v_0^2 > \frac{2gI}{Ma}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Domanda 3 Dato che conosciamo un punto fisso, possiamo scrivere

$$\vec{v}_{cm} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{cm}$$

ossia

$$\vec{v}_{cm} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ -a & a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\hat{x} - a\omega_0\hat{y} = \frac{Ma^2 v_0}{I}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)$$

Soluzione

Domanda 1 Imponiamo l'equilibrio meccanico:

$$k_1 \frac{V_1}{S} = P_1 S = \frac{nRT_1 S}{V_1}$$

da cui

$$V_1 = S\sqrt{\frac{nRT_1}{k_1}} \tag{1.5.1}$$

Domanda 2 Dalla conservazione dell'energia troviamo che

$$nc_V T_1 + \frac{k_1}{2}\frac{V_1^2}{S^2} = nc_V T_f + \frac{k_1}{2}\frac{\tilde{V}_1^2}{S^2} + \frac{k_2}{2}\frac{\tilde{V}_2^2}{S^2}$$

dove $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ sono i volumi dei due scomparti nello stato finale. Ma per l'equilibrio meccanico deve essere

$$k_1 \tilde{V}_1 = k_2 \tilde{V}_2 = PS^2 \tag{1.5.2}$$

ed inoltre

$$P\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) = nRT_f$$

da cui

$$\frac{P^2 S^2}{\chi} = nRT_f \tag{1.5.3}$$

dove si è posto

$$\chi = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Eliminando $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ e V_1^2 tramite le equazioni (1.5.2), (1.5.1) otteniamo

$$n\left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_1 = nc_V T_f + \frac{1}{2}\frac{P^2 S^2}{\chi}$$

ed utilizzando l'equazione (1.5.3) vediamo che la temperatura non è cambiata,

$$T_f = T_1$$

Domanda 3 L'entropia di un gas perfetto è data da

$$S = nc_V \log T + nR \log V$$

dato che la temperatura non cambia e il volume finale è dato da

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = S\sqrt{nRT_f\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

otteniamo

$$\Delta S = \frac{1}{2} nR \log \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)$$