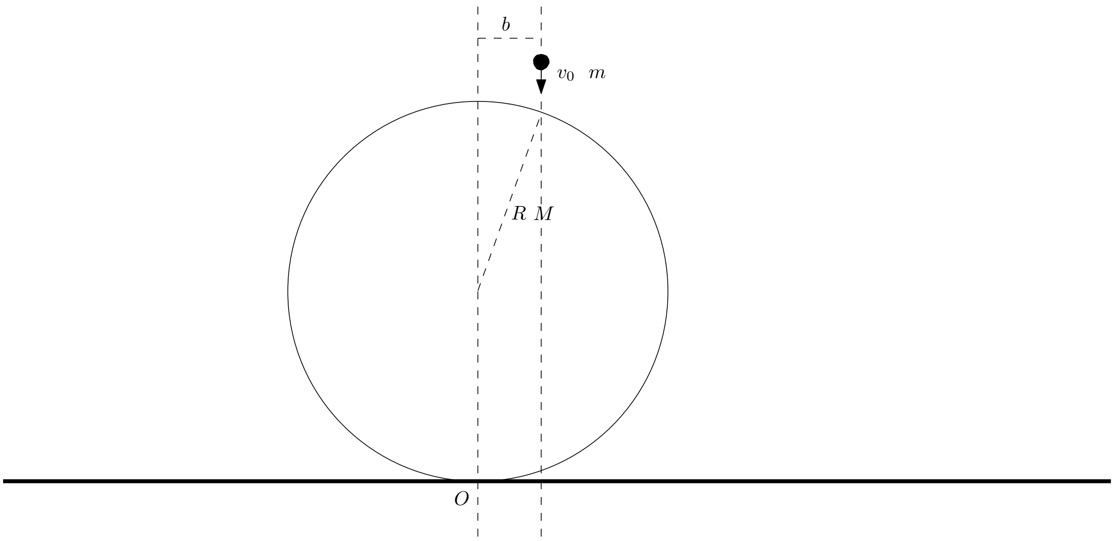
1.9. 21 luglio 2011

Problema 1 (15 punti)



Un disco di massa M e raggio R ruota senza strisciare su un piano orizzontale. Una massa puntiforme m urta su di esso e rimane attaccato. Nell'istante immediatamente precedente l'urto la velocità del punto materiale è verticale e vale v_0 in modulo. La proiezione del punto d'impatto sul piano di appoggio orizzontale si trova ad una distanza b da O.

1. Dopo un certo tempo la massa m arriva a toccare il piano di appoggio in un punto O'. Determinare la posizione di O' rispetto ad O.
2. Determinare la velocità angolare del sistema disco+massa immediatamente dopo l'urto.
3. Determinare la velocità angolare del sistema quando la massa m arriva a toccare il piano di appoggio.

Problema 2 (15 punti)

La radiazione elettromagnetica può essere trattata come un gas caratterizzato dalle equazioni di stato

$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}, \qquad U = bVT^4$$

dove b è una costante.

1. In una trasformazione adiabatica vale $PV^\gamma =$ costante, come per un gas perfetto. Calcolare γ.
2. Un cilindro impermeabile al calore provvisto di un pistone mobile contiene radiazione elettromagnetica alla temperatura T_i e volume V_i. Il pistone viene mantenuto

inizialmente in equilibrio mediante una opportuna forza esterna. Questa viene poi aumentata molto lentamente fino a quando il volume diviene $V_f < V_i$. Calcolare la pressione finale P_f del gas e la variazione di entropia.

3. Partendo dalla stessa condizione iniziale la forza esterna viene portata istantaneamente a SP_f, dove S è la sezione del cilindro e P_f la pressione del gas calcolata precedentemente. Calcolare in questo caso il volume finale, e la variazione di entropia.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Data la condizione di rotolamento puro, la massa arriverà sul piano orizzontale ad una distanza uguale all'arco tra O e il punto di impatto:

$$\overline{OO'} = \left[\pi - \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)\right] R$$

Domanda 2

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto ad O, dato che l'unica forza esterna impulsiva è applicata in quel punto. Possiamo scrivere allora

$$-mv_0 b = I\omega$$

dove

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}MR^2 + m\left(b^2 + h^2\right) \\ h &= R + \sqrt{R^2 - b^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\omega = -\frac{mv_0 b}{I}$$

Domanda 3

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia, e quindi

$$\frac{1}{2}I(b)\omega^2 + mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\omega_f^2$$

Sostituendo la velocità angolare iniziale abbiamo

$$\omega_f = \sqrt{\frac{4}{3MR^2}\left(\frac{m^2 v_0^2 b^2}{2I} + mgh\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Abbiamo

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \\ &= bT^3dV + 4bT^2VdT + \frac{b}{3}T^3dV \\ &= \frac{4}{3}bT^3dV + 4bT^2VdT = 0 \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} &= 0 \\ V^{1/3}T &= \text{costante} \\ V^{1/3}\left(\frac{3}{b}P\right)^{1/4} &= \text{costante} \\ PV^{4/3} &= \text{costante} \end{aligned}$$

da cui $\gamma = 4/3$.

Domanda 2

Dato che

$$P = \frac{b}{3}T^4$$

conosciamo la pressione iniziale,

$$P_i = \frac{b}{3}T_i^4$$

Quindi

$$P_iV_i^{4/3} = P_fV_f^{4/3}$$

e

$$P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{4/3} = \frac{b}{3}\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{4/3}T_i^4$$

Dato che la trasformazione è reversibile, l'entropia non è cambiata.

Domanda 3

In questo caso

$$\Delta U = P_f\left(V_i - V_f\right)$$

ma

$$
\begin{aligned}
3P_fV_f - 3P_iV_i &= P_f\left(V_i - V_f\right) \\
4P_fV_f &= \left(P_f + 3P_i\right)V_i \\
V_f &= \frac{1}{4}\left(1 + 3\frac{P_i}{P_f}\right)V_i
\end{aligned}
$$

Per calcolare la variazione di entropia utilizziamo la (1.9.1). Passiamo dallo stato iniziale a quello finale con un'isoterma seguita da una trasformazione a volume costante. Per l'isoterma abbiamo

$$\Delta S_1 = \int_{V_i}^{V_f} \frac{4}{3} b T_i^3 dV = \frac{4}{3} b T_i^3 \left(V_f - V_i\right)$$

e per la trasformazione a volume costante

$$\Delta S_2 = \int_{T_i}^{T_f} 4bT^2 V_f dT = \frac{4}{3} b V_f \left(T_f^3 - T_i^3\right)$$

e quindi

$$\Delta S = \frac{4}{3} b \left(V_f T_f^3 - V_i T_i^3\right)$$

Tenendo conto che

$$P_f = \frac{b}{3} T_f^4$$

possiamo anche scrivere

$$\Delta S = \frac{4}{3} b \left[\frac{1}{4}\left(1 + 3\frac{P_i}{P_f}\right)\left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{3/4} - 1\right] V_i T_i^3$$