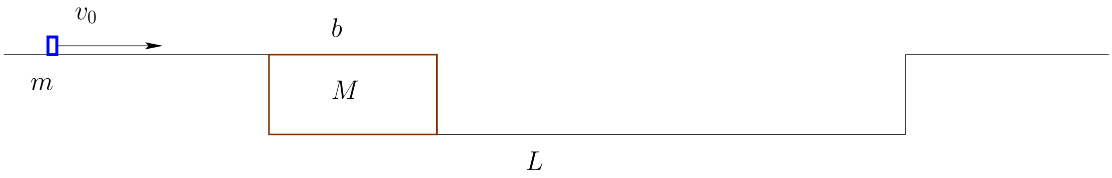
2.1. 10 gennaio 2007

Primo problema (15 punti)



Nel sistema in figura tra il blocco di massa M e lunghezza b e la massa m è presente un attrito descritto da coefficienti statici e dinamici μ_s e μ_d. Inizialmente la particella si muove sul piano a sinistra (privo di attrito) con velocità v_0. Il blocco è libero di muoversi nella scanalatura, anche essa priva di attrito, e arrivando al bordo a destra vi rimane attaccato.

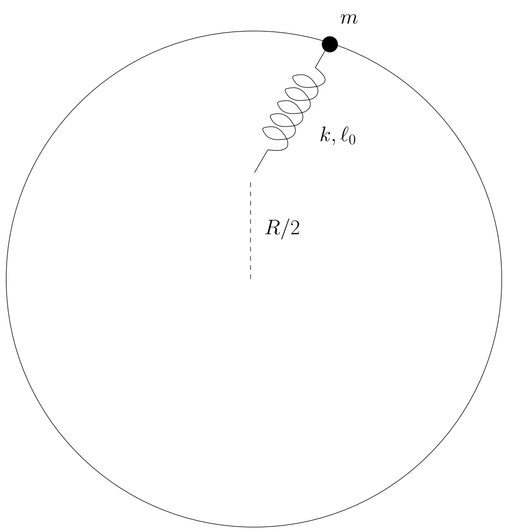
1. Supponendo che la particella non cada nella scanalatura calcolare la velocità del centro di massa del sistema massa+blocco. Rimane la stessa anche dopo l'urto?

2. Per quali valori di μ_d la particella cade nella scanalatura?

3. Se la particella si ferma relativamente al blocco prima dell'arrivo di questo sul bordo destro, cosa accade al momento dell'urto? In generale sotto quali condizioni la particella passa oltre il bordo destro, e con che velocità?

Secondo problema (15 punti)

La particella di massa m è vincolata alla guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Inoltre è fissata ad una molla di costante k e lunghezza a riposo ℓ_0. L'altro estremo della molla è fissato a un punto posto a una distanza $R/2$ dal centro della guida.



BY NC SA

1. Se $\ell_0 = 0$ determinare la minima velocità che deve avere la particella nel punto di minimo allungamento della molla per poter percorrere completamente la guida.

2. In funzione di $\ell_0 \geq 0$ discutere le posizioni di equilibrio del sistema.

3. Scelta una opportuna coordinata scrivere le equazioni del moto per il sistema, sempre per ℓ_0 generico.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La quantità di moto del sistema blocco+massa si conserva durante il moto nella scanalatura. La velocità del centro di massa è quindi uguale a quella iniziale, ossia

$$v_{cm} = \frac{mv_0}{m+M}\,.$$

La conservazione cessa di valere durante l'urto, perchè sul sistema agisce una forza orizzontale, la reazione vincolare della parete. Dopo l'urto in effetti avremo

$$v_{cm} = \frac{mv}{m+M}$$

dove v è la velocità della particella dopo l'urto. Ma $v < v_0$ perchè parte dell'energia si è dissipata per attrito.

Domanda 2

La particella cade nella scanalatura se percorre una distanza b relativa al blocco prima dell'urto con la parete. La forza di attrito applicata al cuneo vale

$$F_a = \mu_d mg$$

quindi il moti del cuneo e della particella sono uniformemente accelerati, dati da ($\gamma = m/M$)

$$\begin{aligned} s &= v_0 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2 \\ S &= \frac{1}{2}\gamma\mu_d g t^2\,. \end{aligned}$$

Il tempo τ_b necessario a percorrere una distanza relativa b è determinata da

$$s - S = v_0\tau_b - \frac{1}{2}\mu_d\left(1+\gamma\right)g\tau_b^2 = b$$

e quello a cui avviene l'urto da

$$S = \frac{1}{2}\gamma\mu_d g\tau_u^2 = L - b\,.$$

Segue che

$$
\begin{aligned}
\tau_b &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2b\mu_d\,(1+\gamma)\,g}}{\mu_d\,(1+\gamma)\,g} \\
\tau_u &= \sqrt{\frac{2(L-b)}{\gamma\mu_d g}}\,.
\end{aligned}
$$

La soluzione accettabile per τ_b è la più piccola, corrispondente al segno negativo. Abbiamo quindi la condizione $\tau_b < \tau_u$, ossia

$$
v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2b\mu_d\,(1+\gamma)\,g} < \sqrt{2(L-b)\mu_d\gamma^{-1}\,(1+\gamma)^2\,g}\,.
$$

Per discutere questa equazione conviene introdurre i parametri adimensionali

$$
x = \frac{2\mu_d g(1+\gamma)b}{v_0^2} \geq 0
$$

e

$$
\beta = \frac{1+\gamma}{\gamma}\left(\frac{L}{b} - 1\right) \geq 0\,.
$$

La disequazione diviene

$$
1 - \sqrt{1-x} < \sqrt{\beta x}
$$

che ha per soluzione

$$
0 \leq x < \min\left[1, \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\right]
$$

ossia

$$
0 \leq \mu_d < \frac{v_0^2}{2g(1+\gamma)b}\min\left\{1, \frac{4\gamma(1+\gamma)\left(\frac{L}{b}-1\right)}{\left[\frac{L}{b}(1+\gamma)-1\right]^2}\right\}\,.
$$

Domanda 3

Se la particella si ferma relativamente al blocco prima dell'urto, immediatamente dopo continuerà a muoversi con la stessa velocità relativa al sistema di laboratorio. Questa è data dalla velocità del centro di massa del sistema prima dell'urto determinata in precedenza.

Condizione necessaria per passare oltre il bordo destro è ovviamente quella di non cadere nella scanalatura, cioè per quanto visto al punto precedente

$$
x \geq \min\left[1, \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\right]\,.
$$

Se inoltre $x \geq 1$ la particella è ferma rispetto al blocco prima dell'urto, con una energia

CC BY NC SA

cinetica nel sistema di laboratorio di

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{m v_0}{m+M} \right)^2 .$$

Per poter passare oltre il bordo destro questa dovà essere maggiore del lavoro che verrà fatto dalle forze di attrito dopo l'urto sul tratto non ancora percorso sul blocco. Il tratto già percorso si può trovare eguagliando l'energia disponibile nel centro di massa al lavoro fatto sul sistema dall'attrito:

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = \mu_d m g \left(\delta - \Delta \right)$$

dove δ e Δ sono gli spostamenti di particella e blocco. Ma nel sistema del centro di massa

$$m\delta + M\Delta = 0$$

per cui

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = \mu_d m g \left(1 + \frac{m}{M} \right) \delta$$

e quindi

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_d g} \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 .$$

La velocità finale si otterrà quindi dall'equazione

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{m v_0}{m+M} \right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \mu_d m g \left[b - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_d g} \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 \right]$$

e $v^2 > 0$ corrisponderà alla condizione per la quale la particella passa sul bordo. Quando $x < 1$ avremo sicuramente il passaggio del bordo, e la valocità finale si potrà ottenere semplicemente da

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \mu_d m g L$$

da cui

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g L} .$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Possiamo scegliere come coordinata l'angolo θ tra il raggio corrispondente alla posizione della particella e quello corrispondente alla posizione di massimo avvicinamento. L'energia cinetica si scriverà quindi

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

e quella potenziale

$$U = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Con

$$\ell = \sqrt{R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta - R/2)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\,.$$

Nel nostro caso $\ell_0 = 0$ quindi

$$E = K + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{kR^2}{2}\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)\,.$$

Eguagliando l'energia nel punto di massimo e di minimo avvicinamento otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\ell_{min}^2 > \frac{1}{2}k\ell_{max}^2$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\ell_{max}^2 - \ell_{min}^2\right)}$$

ossia

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}R^2\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)} = R\sqrt{\frac{2k}{m}}\,.$$

Domanda 2

Se sulla molla vi è tensione, una posizione sarà di equilibrio solo quando questa è ortogonale al vincolo. Ciò è possibile chiaramente soltanto in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

L'altra possibilità è che non vi sia tensione. Questo accade quando la molla è alla sua lunghezza di riposo, il che significa

$$\ell_0^2 = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

cosa possibile solo se

$$\frac{1}{2}R \le \ell_0 \le \frac{3}{2}R\,.$$

Il relativo angolo è dato da

$$\cos\theta = \frac{5}{4} - \frac{\ell_0^2}{R^2}\,.$$

CC BY NC SA

Domanda 3

Possiamo ottenere le equazioni del moto derivando l'energia totale rispetto al tempo:

$$
\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)^2\right] \\
&= mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
mR^2\ddot{\theta} + \frac{k}{2}\left(R - \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\right)\sin\theta = 0\,.
$$

CC BY NC SA