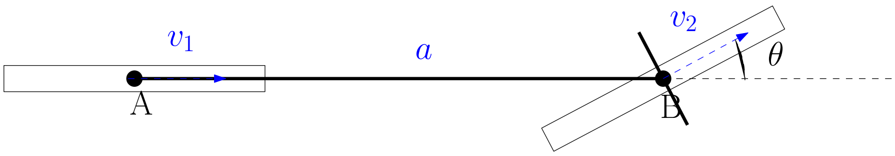
2.13. 14 luglio 2010

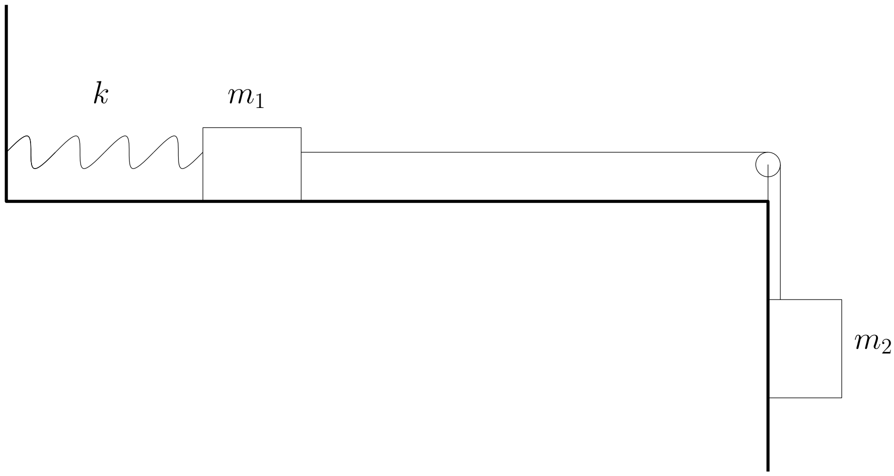
Problema 1



Una schema molto semplice di bicicletta è rappresentato in figura. I due punti di contatto con il suolo A e B si muovono istante per istante con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, parallelamente alla direzione della ruota. Poniamo $a = \overline{AB}$ e indichiamo con θ l'angolo di rotazione del manubrio.

1. Trovare la relazione tra $|\vec{v}_1|$ e $|\vec{v}_2|$, in funzione dell'angolo θ.
2. Determinare per dati $|\vec{v}_1|$ e θ la legge oraria del punto B in un sistema di riferimento con origine nel punto A, e assi in direzione fissa rispetto al suolo.
3. Determinare la traiettoria del punto A in un sistema di riferimento fissato al suolo.

Problema 2



Le due masse in figura sono collegate da un filo inestensibile di massa nulla, e la prima è vincolata alla parete da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si determini l'allungamento della molla all'equilibrio.
2. Determinare la frequenza delle oscillazioni del sistema, nell'ipotesi che la massa m_1 non urti contro la parete.
3. Supponendo che il filo sia in grado di sopportare una tensione massima T_M, determinare la massima velocità iniziale che le masse possono avere nella posizione di equilibrio per evitare che questo si spezzi.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Dato che la distanza tra A e B non può variare deve essere

$$|\vec{v}_2|\cos\theta = |\vec{v}_1|$$

Domanda 2 Nel sistema di riferimento specificato il punto A è fisso, e il punto B si muove di moto circolare uniforme con velocità tangenziale

$$v'_T = |\vec{v}_2|\sin\theta = |\vec{v}_1|\tan\theta$$

quindi

$$\begin{aligned} x'_B &= a\cos\omega t \\ y'_B &= a\sin\omega t \end{aligned}$$

con

$$\omega = \frac{|\vec{v}_1|}{a}\tan\theta$$

Domanda 3 Nel sistema di riferimento fisso al suolo il punto A si muove nella direzione di B con velocità costante in modulo $|\vec{v}_1|$. La direzione quindi ruota con la velocità angolare ω determinata al punto precedente. Quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= |\vec{v}_1|\cos\omega t \\ \dot{y}_A &= |\vec{v}_1|\sin\omega t \end{aligned}$$

ed integrando otteniamo, immaginando A inizialmente nell'origine,

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{\omega}|\vec{v}_1|\sin\omega t = a\cot\theta\sin\omega t \\ y_A &= \frac{1}{\omega}|\vec{v}_1|(1-\cos\omega t) = a\cot\theta\,(1-\cos\omega t) \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le relazioni precedenti nella forma

$$\begin{aligned} x_A &= a\cot\theta\sin\omega t \\ y_A - a\cot\theta &= -a\cot\theta\cos\omega t \end{aligned}$$

e sommando ambo i membri al quadrato otteniamo

$$x_A^2 + (y_A - a\cot\theta)^2 = a^2\cot^2\theta$$

La traiettoria è quindi una circonferenza di raggio $a\cot\theta$ e centro in $(0, a\cot\theta)$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1 Deve essere

$$k\ell = T = m_2 g$$

da cui

$$\ell = \frac{m_2 g}{k}$$

Domanda 2 Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -kx + T \\ m_2 \ddot{x} &= m_2 g - T \end{aligned}$$

sommando membro a membro eliminiamo la tensione ottenendo

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + kx = m_2 g$$

da cui otteniamo

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Domanda 3 Dalle seconda delle due equazioni scritte in precedenza ricaviamo addesso la tensione, ottenendo

$$T = m_2 \left(g - \ddot{x}\right)$$

e dato che

$$\begin{aligned} x &= \ell + A \sin \omega t \\ v &= A\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

otteniamo

$$A\omega = v_0$$

e quindi

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega v_0 \sin \omega t$$

Deve quindi essere

$$T_M > m_2 \left(g + \omega v_0\right)$$

e quindi

$$v_0 < \frac{1}{\omega}\left(\frac{T_M}{m_2} - g\right)$$