2.14. 10 settembre 2010

Problema 1 (15 punti)

La traiettoria di una particella nel piano è descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{d}{\cos\theta}$$

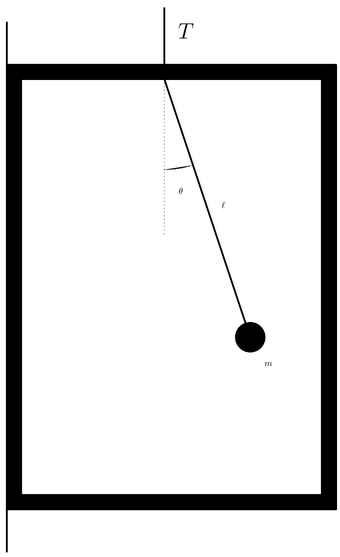
dove $d > 0$ è una costante assegnata.

1. Rappresentare graficamente la traiettoria in un piano cartesiano.
2. Determinare il vettore accelerazione in coordinate polari, in funzione di θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.
3. Determinare $r(t)$ sapendo che il vettore velocità è costante ed ha modulo V, e che $r(0) = d$.

Può essere utile ricordare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Esercizio 2 (15 punti)



La cabina di un ascensore di massa M può muoversi in direzione verticale, ed è trattenuta da un cavo sottoposto ad una tensione T. All'interno di essa è fissato un pendolo costituito da una massa m sospesa a un filo inestensibile e privo di massa di lunghezza ℓ. Inizialmente la cabina è ferma ed il pendolo compie oscillazioni di ampiezza angolare θ_0, come in figura.

1. Determinare la massima e la minima tensione del cavo che regge l'ascensore.

2. Supponiamo adesso che le oscillazioni siano piccole, $\theta_0 \ll 1$. Ad un certo istante il pendolo si trova in posizione verticale, e l'ascensore viene trascinato dal cavo verso l'alto, con accelerazione costante a. Calcolare la nuova ampiezza delle oscillazioni.

3. Appena il pendolo torna in posizione verticale l'ascensore smette di accelerare. Calcolare il lavoro fatto sino a quel momento dal motore che trascinava il cavo.

Soluzione primo problema

Domanda 1 L'equazione si può porre nella forma

$$d = r\cos\theta = x$$

segue che la traiettoria è una retta verticale a una distanza d dall'origine.

Domanda 2 Dato che la traiettoria è rettilinea, l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \ddot{y}\hat{e}_y$$

Dato che

$$y = r\sin\theta = d\tan\theta$$

troviamo

$$\dot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$$

e

$$\ddot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{d\sin\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta}^2$$

e dato che

$$\hat{e}_y = \hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta$$

troviamo

$$\vec{a} = \frac{d}{\cos^2\theta}\left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sin\theta\right)(\hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta)$$

Domanda 3 Per il vettore velocità abbiamo

$$\vec{v} = \dot{y}\hat{e}_y = \pm V\hat{e}_y$$

Segue immediatamente che

$$\begin{aligned} x &= d \\ y &= y(0) \pm Vt \end{aligned}$$

e quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{d^2 + (y(0) \pm Vt)^2}$$

che imponendo $r(0) = d$ si riduce a

$$r(t) = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Alternativamente si può scrivere

$$\frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = V$$

ed integrando

$$d\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = Vt$$

da cui ($\theta(0) = 0$ dato che $r(0) = d$)

$$d\tan\theta(t) = Vt$$

ma

$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 La tensione del filo deve equilibrare la somma della forza peso della cabina e della componente verticale della tensione T_P del pendolo. Scrivendo l'equazione del moto di quest'ultimo nella direzione del filo abbiamo

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T_P - mg\cos\theta$$

ossia

$$T_P = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

e quindi

$$T_P = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} T &= T_P\cos\theta + Mg \\ &= mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)\cos\theta + Mg \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_{MAX} &= mg\left(3-2\cos\theta_0\right)+Mg \\ T_{MIN} &= Mg \end{aligned}$$

rispettivamente per $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$.

Domanda 2 Lavoriamo nel sistema di riferimento dell'oscillatore. Prima dell'accelerazione, che supponiamo iniziare a $t = 0$, abbiamo

$$\theta = \theta_0 \sin \omega_0 t$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dopo l'accelerazione sarà, tenendo conto della continuità,

$$\theta = \theta_1 \sin \omega_1 t$$

dove

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g+a}{\ell}}$$

Imponendo anche la continuità di $\dot{\theta}$ troviamo

$$\theta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1}\theta_0$$

Domanda 3 Il pendolo tornerà in posizione verticale a

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1}$$

e da quel momento oscillerà secondo la legge

$$\theta = A\cos\omega_0\left(t-\tau\right)+B\sin\omega_0\left(t-\tau\right)$$

Imponendo la continuità di θ e $\dot{\theta}$ troviamo $A = 0$ e $B = \theta_0$. Quindi l'oscillatore si muove nuovamente con l'ampiezza iniziale. L'energia del sistema sarà aumentata di

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}\left(M+m\right)a^2\tau^2+\frac{1}{2}\left(M+m\right)ga^2\tau^2 \\ &= \pi^2\left(M+m\right)\ell\frac{a^2}{g+a} \end{aligned}$$

che corrisponde al lavoro fatto dal motore.