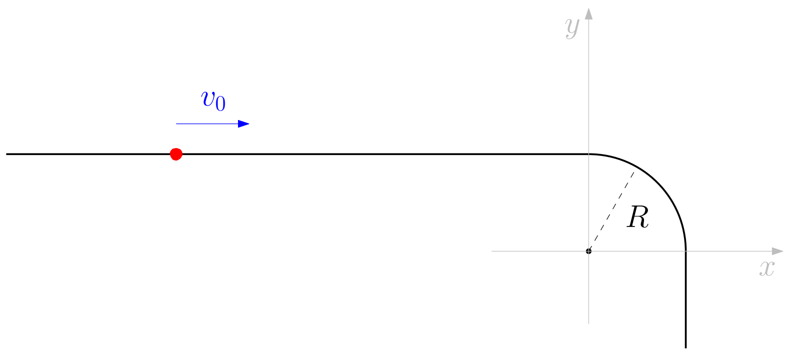
2.17. 1 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)



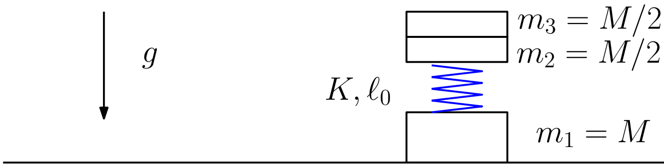
Un punto materiale si muove su una guida della forma in figura, ottenuta prolungando un quarto di circonferenza di raggio R con delle rette. Il modulo della velocità del punto è costante e vale v_0, inoltre $x = 0$ per $t = 0$.

1. Determinare la componenti v_x, v_y della velocità del punto nelle direzioni degli assi in funzione del tempo nell'intervallo $-\pi R/v_0 < t < \pi R/v_0$, e rappresentatele graficamente.

2. Determinare la componenti a_x, a_y dell'accelerazione del punto nelle direzioni degli assi in funzione del tempo nell'intervallo $-\pi R/v_0 < t < \pi R/v_0$, e rappresentatele graficamente.

3. Supponendo adesso che sia la componente x della velocità a mantenersi costante e uguale a v_0, calcolate il modulo dell'accelerazione totale in funzione del tempo per $t < \frac{R}{v_0}$.

Problema 2 (15 punti)



Una massa $m_1 = M$ è appoggiata su un piano orizzontale. Al di sopra di essa si trova una massa $m_2 = M/2$, separata da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo ℓ_0. Gli estremi della molla sono fissati alle massa. Infine una terza massa $m_3 = M/2$ è appoggiata sopra a m_2.

1. Determinare per quale compressione $\Delta\ell_{eq}$ della molla il sistema è in equilibrio.

2. Si comprime ulteriormente la molla di un tratto δ. Se la massa m_1 è incollata al suolo, per quale valore minimo di δ la massa m_3 si stacca da m_2?

3. Se le massa m_3 è incollata alla massa m_2 calcolare per quale valore minimo di δ la massa m_1 si stacca da terra.

Soluzione primo problema

Domanda 1

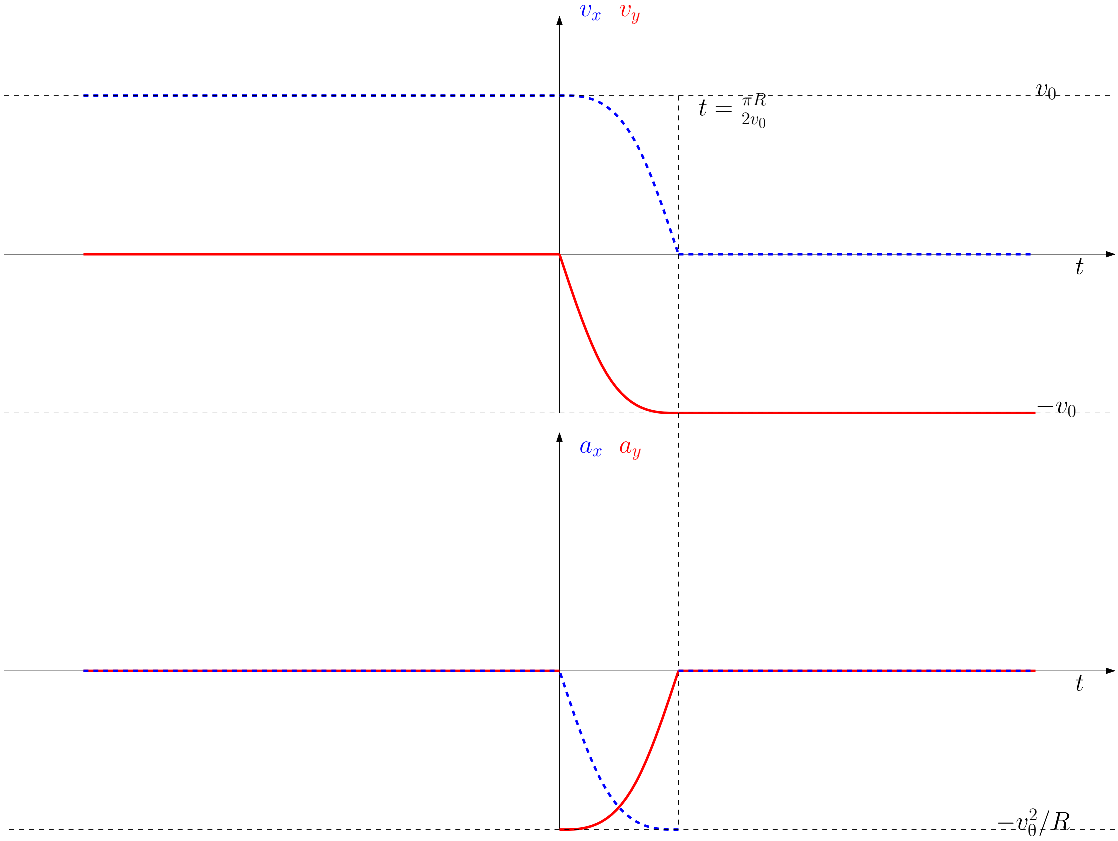


Figura 2.1.: I grafici per le componenti x, y della velocità (sopra) e dell'accelerazione. La componente x è blu tratteggiata, la componente y rossa continua.

Abbiamo:

1. $t < 0$, moto rettilineo uniforme,

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0 \\
v_y &= 0
\end{aligned}
$$

2. $0 < t < \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, moto circolare uniforme,

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\frac{v_0}{R}t \\ v_y &= -v_0 \sin\frac{v_0}{R}t \end{aligned}$$

3. $t > \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, moto rettilineo uniforme,

$$\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= -v_0 \end{aligned}$$

Entrambe le velocità sono rappresentate in Figura 2.1 (grafico superiore).

Domanda 2

Possiamo direttamente derivare le espressioni precedenti rispetto al tempo. L'unico intervallo con accelerazione diversa da zero è $0 < t < \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, nel quale

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{v_0^2}{R}\sin\frac{v_0}{R}t \\ a_y &= -\frac{v_0^2}{R}\cos\frac{v_0}{R}t \end{aligned}$$

Alternativamente si poteva osservare che in un moto circolare uniforme abbiamo solo una accelerazione centripeta di modulo v_0^2/R, da proiettare lungo i due assi. Entrambe le accelerazioni sono rappresentate in Figura 2.1 (grafico inferiore).

Domanda 3

Sappiamo che $x = v_0 t$, e che sulla parte curva della guida $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{R^2 - v_0^2 t^2} \\ \dot{y} &= -\frac{v_0^2 t}{\sqrt{R^2 - v_0^2 t^2}} \\ \ddot{y} &= -\frac{R^2 v_0^2}{\left(R^2 - v_0^2 t^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

e quindi

$$|a| = |\ddot{y}| = \frac{R^2 v_0^2}{\left(R^2 - v_0^2 t^2\right)^{3/2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per avere equilibrio deve essere

$$K\Delta\ell_{eq} = Mg$$

cioè

$$\Delta\ell_{eq} = \frac{Mg}{K}$$

Domanda 2

Se le due masse restano attaccate abbiamo una oscillazione armonica attorno al punto di equilibrio del tipo

$$y = -\delta \cos \omega t$$

con $\omega = \sqrt{K/M}$. D'altra parte l'equazione del moto per la massa superiore è

$$\frac{M}{2}\ddot{y}_3 = -\frac{M}{2}g + N$$

dove N è la reazione normale, che può essere solo positiva. Allore il distacco si avrà se

$$N = \frac{M}{2}\left(\ddot{y}_3 + g\right) = \frac{M}{2}\left(\delta\omega^2 \cos \omega t + g\right) < 0$$

e questo accadrà per

$$\delta > \frac{g}{\omega^2} = \frac{gM}{k}$$

Domanda 3

La massa m_1 si staccherà da terra se la forza della molla supererà Mg. Dato che, ancora una volta, in assenza di distacco abbiamo una oscillazione armonica di ampiezza δ attorno alla posizione di equilibrio dovrà essere

$$Mg < K\left(\delta - \Delta\ell_{eq}\right)$$

cioè

$$\delta > \frac{Mg}{K} + \Delta\ell_{eq} = \frac{2Mg}{K}$$