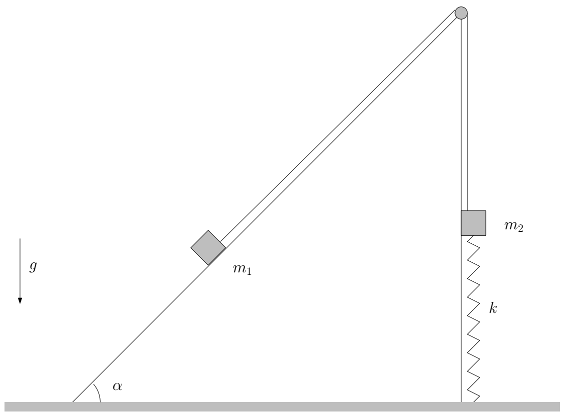
2.18. 10 settembre 2012

Problema 1 (15 punti)

Un pallone viene lanciato con velocità iniziale di modulo v_0 dalla sommità di un palazzo di altezza $h = 40$m. La velocità iniziale è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ. Nel rispondere alle domande che seguono si può trascurare l'attrito dell'aria.

1. Se nello stesso momento un uomo inizia a correre dalla base del palazzo, con quale velocità costante deve muoversi per riuscire a prendere il pallone?
2. Dopo quanto tempo il pallone tocca terra? Come si deve lanciare il pallone per rendere massimo questo tempo?
3. Quanto vale il modulo della velocità quando il pallone arriva a terra?

Problema 2 (15 punti)



Una massa m_1 è posta su un piano inclinato (di un angolo α rispetto all'orizzontale) privo di attrito, ed è collegata come in figura ad un'altra massa m_2 tramite un filo inestensibile. La seconda massa è collegata al suolo con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, come in figura.

1. Sotto quale condizione nella posizione di equilibrio la molla è allungata?
2. Nel caso particolare $\alpha = \pi/4$ e $m_1 = 2\sqrt{2}m_2$ calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio.
3. Supponendo che la molla si spezzi, calcolare l'accelerazione successiva della massa m_2.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La velocità dell'uomo deve coincidere con la componente orizzontale della velocità del pallone, cioè

$$v = v_0 \cos\theta$$

Domanda 2

Le leggi orarie del pallone sono date da

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta t \\ y &= h + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Il pallone tocca terra quando

$$t^2 - \frac{2v_0 \sin\theta}{g} t - \frac{2h}{g} = 0$$

ossia per

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

che è una funzione crescente di $\sin\theta$. Il massimo si ottiene quindi per $\sin\theta = 1$, cioè per $\theta = \pi/2$, e vale

$$t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

Domanda 3

La velocità verticale è data da

$$\dot{y} = v_0 \sin\theta - gt$$

Sostituendo il tempo trovato precedentemente abbiamo

$$v_f = \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2hg}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dalla condizione di equilibrio per la massa m_1 troviamo la tensione del filo

$$T = m_1 g \sin\alpha$$

mentre per la massa m_2 abbiamo

$$T - m_2 g - k\ell = 0$$

da cui

$$\ell = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{k} g$$

che risulta positivo per $m_2 < m_1 \sin\alpha$.

Domanda 2

Scriviamo le equazioni del moto per le due masse, usando come coordinata l'allungamento della molla:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{\ell} &= T - k\ell - m_2 g \\ m_1 \ddot{\ell} &= m_1 g \sin\alpha - T \end{aligned}$$

Eliminando la tensione otteniamo l'equazione del moto

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\ell} + k\ell = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g$$

che descrive oscillazioni armoniche di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\left(1 + 2\sqrt{2}\right) m_2}}$$

attorno alla posizione di equilibrio

$$\ell_{eq} = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{k} g = \frac{m_2}{k} g$$

Domanda 3

Riscriviamo l'equazione del moto precedente, ponendo $k = 0$. Otteniamo

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\ell} = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g$$

e quindi l'accelerazione è costante e vale

$$a_2 = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}$$