2.20. 22 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)

Una massa m è sospesa a due punti posti alla stessa altezza e separati orizzontalmente da una distanza $2d$. La sospensione avviene tramite due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1 e k_2. Inoltre è presente un campo gravitazionale costante $-g\hat{y}$.

1. In un opportuno sistema di riferimento determinare la posizione di equilibrio del sistema.

2. Se la massa è inizialmente ferma nel punto medio del segmento che unisce i punti di sospensione determinare l'orbita successiva.

3. Determinare un punto dell'orbita nel quale l'accellerazione della massa si annulla e dire dopo quanto tempo viene raggiunto.

Problema 2 (15 punti)

Una particella si muove sulla parabola $y = \alpha x^2$ mantenendo costante la componente orizzontale dell'accelerazione, $a_x = 2.0\text{ms}^{-1}$. Si sa che la particella al tempo $t = 0$ si trova nel vertice della parabola, e che la sua velocità vale $\vec{v}_0 = -10\text{ms}^{-1}\hat{x}$.

1. Determinare la costante α sapendo che a $t = 0$ il modulo dell'accelerazione vale $a_0 = 4.0\text{ms}^{-1}$ (supporre $\alpha > 0$). Quali sono le dimensioni di α?

2. Quanto vale il modulo della velocità al tempo $t = 1\text{s}$?

3. Ad un certo istante la particella si ferma. Determinare lo spazio percorso fino a quel momento. Suggerimento: può essere utile considerare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] + C$$

Soluzione primo problema

Domanda 1

Le forze che agiscono sulla massa sono

$$\vec{F} = -mg\hat{y} - k_1\left(\vec{r} - \vec{d}_1\right) - k_2\left(\vec{r} - \vec{d}_2\right)$$

dove $\vec{r}$ indica la posizione della massa e $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ indicano la posizione dei punti di sospensione. L'equilibrio sarà dunque dove $\vec{F} = 0$, ossia in

$$\vec{r}_{eq} = \frac{k_1\vec{d}_1 + k_2\vec{d}_2 - mg\hat{y}}{k_1 + k_2}$$

Ponendo l'origine in $\left(\vec{d_1}+\vec{d_2}\right)/2$ abbiamo $\vec{d_1}=-\vec{d_2}=(d,0)$ e quindi

$$
\begin{aligned}
x_{eq} &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}d \\
y_{eq} &= -\frac{mg}{k_1+k_2}
\end{aligned}
$$

Domanda 2

Il moto del sistema consiste nella composizione di due oscillazioni armoniche indipendenti di periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

nelle direzioni orizzontali e verticali. Nel caso generale la traiettoria è un'ellisse con centro nel punto di equilibrio. Questa ellisse deve passare dal punto iniziale con velocità nulla. Si tratta quindi di un'ellisse degenere: un segmento con un estremo nel punto iniziale e con la posizione di equilibrio nel punto medio.

Domanda 3

Se l'accelerazione è nulla allora la forza totale che agisce sulla massa deve essere nulla. Ci troviamo quindi nel punto di equilibrio, che viene raggiunto in un quarto del periodo di oscillazione:

$$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il moto avviene sulla parabola abbiamo

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= 2\alpha x\dot{x} \\
\ddot{y} &= 2\alpha\dot{x}^2+2\alpha x\ddot{x}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$a_0=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+4\alpha^2\dot{x}^2}$$

da cui

$$\alpha=\sqrt{\frac{a_0^2-\ddot{x}^2}{4\dot{x}^2}}=\sqrt{\frac{a_0^2-a_x^2}{4v_0^2}}$$

Domanda 2

Il modulo della velocità vale

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(1 + 4\alpha^2 x^2\right) \dot{x}^2$$

Dato che lungo x il moto è uniformemente accelerato al tempo $t = t_1 = 1$s abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v_0 + a_x t_1 \\ x &= -v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \end{aligned}$$

e sostituendo troviamo quanto richiesto.

Domanda 3

La particella si ferma al tempo t_2 determinato da

$$-v_0 + a_x t_2 = 0$$

e quindi a

$$t_2 = \frac{v_0}{a_x}$$

Lo spazio percorso fino a quel momento sarà la lunghezza dell'arco di parabola corrispondente:

$$s = \int_0^{t_2} v dt = \int_0^{x_2} \sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2} dx$$

con

$$x_2 = -v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_x t_2^2$$

Integrando abbiamo infine

$$s = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{2\alpha x_2} \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{4\alpha} \left[2\alpha x_2 \sqrt{1 + 4\alpha^2 x_2^2} + \log\left(2\alpha x_2 + \sqrt{1 + 4\alpha^2 x_2^2} \right) \right]$$