2.9. 17 settembre 2009

Problema 1 (15 punti)

Un punto materiale si muove su una rotaia parabolica verticale con equazione $y = \alpha x^2$ in presenza di gravità. La velocità v lungo l'asse orizzontale è costante.

1. Si calcoli il modulo dell'accelerazione in funzione del tempo.

2. Esiste una velocità per la quale la rotaia non esercita una reazione vincolare? Se sì, se ne calcoli il valore in funzione di α e v.

3. Si consideri adesso la stessa rotaia accelerata orizzontalmente con accelerazione costante a. Trovare le possibili posizioni di equilibrio per un punto materiale vincolato ad essa, in assenza di attriti.

Problema 2 (15 punti)

Un proiettile di massa m e velocità v colpisce un bersaglio fermo di massa M ignota. L'urto è elastico e il proiettile rimbalza all'indietro con velocità v'.

1. Si calcoli la massa del bersaglio.

2. Un altro proiettile con stessa massa e velocità colpisce il bersaglio. Si osserva che la massima velocità del proiettile dopo l'urto nella direzione trasversale è v''. Si calcoli la massa del bersaglio, sempre nel caso di urto elastico.

3. Si osserva ora che il proiettile viene deviato di un angolo θ. L'urto è elastico. Per una fissata velocità finale del proiettile si stabilisca la relazione tra M e θ.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Derivando il vettore posizione

$$\vec{R} = \left(x, \alpha x^2\right) \tag{2.9.1}$$

troviamo la velocità

$$\vec{V} = (\dot{x}, 2\alpha x\dot{x}) = v(1, 2\alpha x) \tag{2.9.2}$$

e derivando ulteriormente abbiamo l'accelerazione

$$\vec{A} = (0, 2\alpha v^2) \tag{2.9.3}$$

che quindi ha modulo $|A| = 2\alpha v^2$ costante nel tempo.

Domanda 2

Le equazioni del moto si scrive

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= N_x & (2.9.4)\\ m\ddot{y} &= N_y - mg & (2.9.5)\end{aligned}$$

e sostituendo quanto trovato precedentemente abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= N_x & (2.9.6)\\ 2m\alpha v^2 &= N_y - mg & (2.9.7)\end{aligned}$$

Per avere $N_x = N_y = 0$ deve essere

$$v = \pm\sqrt{-\frac{g}{2\alpha}} \qquad (2.9.8)$$

che è quindi possibile solo se $\alpha < 0$.

Domanda 3

Avremo equilibrio quando la somma della forza di gravità e della forza apparente nel sistema solidale alla rotaia

$$\vec{F} = (-ma, -mg) \qquad (2.9.9)$$

è normale al vincolo. Un vettore tangente alla guida è dato da

$$\frac{d\vec{R}}{dx} = (1, 2\alpha x) \qquad (2.9.10)$$

e quindi deve essere

$$\frac{d\vec{R}}{dx} \cdot \vec{F} = -ma - 2\alpha x mg = 0 \qquad (2.9.11)$$

e quindi

$$x = -\frac{a}{2\alpha g} \qquad (2.9.12)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto abbiamo

$$\begin{aligned} mv &= -mv' + MV & (2.9.13)\\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 & (2.9.14)\end{aligned}$$

da cui

$$v + v' = \frac{M}{m} V \tag{2.9.15}$$

$$(v + v')(v - v') = \frac{M}{m} V^2 \tag{2.9.16}$$

e quindi, se $v \neq v'$

$$v + v' = \frac{M}{m} V \tag{2.9.17}$$

$$(v - v') = V \tag{2.9.18}$$

da cui

$$M = \frac{v + v'}{v - v'} m \tag{2.9.19}$$

Domanda 2

Scriviamo nuovamente la conservazione di energia e quantità di moto,

$$mv = mv_x + MV_x \tag{2.9.20}$$

$$0 = mv_y + MV_y \tag{2.9.21}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2} M(V_x^2 + V_y^2) \tag{2.9.22}$$

Eliminando V_x, V_y dall'ultima equazione abbiamo

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{m}{M} (v - v_x)^2 + \frac{m}{M} v_y^2 \tag{2.9.23}$$

Ricaviamo la velocità trasversale

$$v_y^2 = \frac{M}{M + m} \left[v^2 - v_x^2 - \frac{m}{M} (v - v_x)^2\right] \tag{2.9.24}$$

e massimizziamo rispetto a v_x:

$$\frac{dv_y^2}{dv_x} = \frac{2M}{M + m} \left[\frac{m}{M} (v - v_x) - v_x\right] = 0 \tag{2.9.25}$$

da cui

$$v_x = \frac{m}{M + m} v \tag{2.9.26}$$

Sostituendo troviamo la massima velocità trasversale

$$v'' = \frac{M}{M + m} v \tag{2.9.27}$$

e quindi la massa del bersaglio

$$M = \frac{v''}{v - v''} m \tag{2.9.28}$$

Domanda 3

Scriviamo ancora le leggi di conservazione, in forma vettoriale:

$$\vec{v} - \vec{v}_f = \frac{M}{m}\vec{V} \tag{2.9.29}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{2.9.30}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della prima equazione abbiamo

$$v^2 + v_f^2 - 2vv_f\cos\theta = \frac{M^2}{m^2}V^2 \tag{2.9.31}$$

e eliminando la velocità del proiettile usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$v^2 + v_f^2 - 2vv_f\cos\theta = \frac{M}{m}\left(v^2 - v_f^2\right) \tag{2.9.32}$$

da cui

$$M = m\frac{v^2 + v_f^2 - 2vv_f\cos\theta}{v^2 - v_f^2} \tag{2.9.33}$$