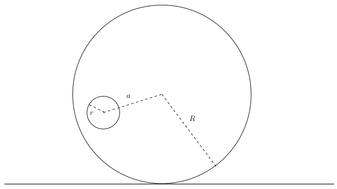
3.1. 18 giugno 2008

Problema 1 (15 punti)



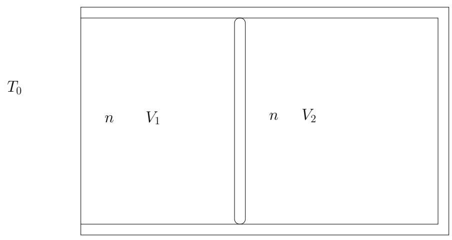
All'interno di un cilindro di massa M, altezza h e raggio R si pratica una cavità, pure cilindrica, di raggio $r < R$ e uguale altezza. Gli assi dei due cilindri sono paralleli, e sono separati da una distanza $a < R - r$. Il cilindro è appoggiato su un piano orizzontale su cui ruota senza strisciare.

1. Calcolare il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro e passante per il centro di massa del sistema.

2. Scrivere l'equazione del moto, scegliendo una coordinata opportuna.

3. Supporre adesso che inizialmente il sistema si trovi nella posizione di equilibrio, con una velocità angolare ω_0 e in condizioni di rotolamento puro. É possibile che per un valore abbastanza grande di ω_0 il cilindro si stacchi dal piano? In caso affermativo calcolare tale valore. L'attrito statico eventualmente necessario a mantenere il rotolamento puro si può immaginare grande a piacere.

Problema 2 (15 punti)



In ciascuno dei due scomparti del recipiente in figura, di volume totale $V = V_1 + V_2$, sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico. Lo scomparto a destra è isolato termicamente, quello a sinistra è in contatto termico con l'ambiente esterno, che può essere visto come un bagno termico a temperatura T_0. Il setto intermedio, impermeabile al calore, è libero di scorrere. Inizialmente la temperatura del gas nello scomparto di destra è $T_2 > T_0$, e il sistema è all'equilibrio.

1. Calcolare i volumi iniziali V_1 e V_2.

2. Applicando gradualmente al setto una forza F lo si sposta dalla posizione di equilibrio. Determinare il lavoro fatto sul sistema quando le temperature dei due scomparti diventano uguali.

3. Con $F = 0$ si trasferisce calore dallo scomparto a destra a quello a sinistra mediante una macchina termica reversibile. Calcolare il lavoro massimo estraibile.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La densità del corpo è

$$\rho = \frac{M}{\pi \left(R^2 - r^2\right) h}$$

quindi se il cilindro fosse pieno avrebbe un momento di inerzia rispetto al suo asse

$$I_{\text{p}} = \frac{1}{2} M_p R^2 = \frac{1}{2} \left(\rho \pi R^2 h\right) R^2 = \frac{1}{2} M \frac{R^2}{\left(R^2 - r^2\right)} R^2$$

dove abbiamo indicato con M_p la sua massa totale. Il cilindro mancante avrebbe invece un momento di inerzia, sempre rispetto al suo asse,

$$I_m = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \left(\rho \pi r^2 h\right) r^2 = \frac{1}{2} M \frac{r^2}{\left(R^2 - r^2\right)} r^2$$

Il centro di massa del sistema si trova ad una distanza

$$d = \frac{m}{M} a = \frac{r^2}{R^2 - r^2} a$$

dall'asse del corpo, dalla parte opposta a quella della cavità. Infine il momento di inerzia cercato si ottiene sottraendo il momento di inerzia del cilindro che occuperebbe la cavità da quello del cilindro completo. Entrambi devono chiaramente essere riferiti all'asse passante per il centro di massa, e quindi

$$I = I_{\text{p}} + M_p d^2 - I_m - m \left(d + a\right)^2$$

É interessante notare che si poteva evitare il calcolo del centro di massa. Detta x una posizione arbitraria presa sulla retta passante dai centri di cilindro e cavità avremmo avuto rispetto ad esso

$$I_x = I_{\text{p}} + M_p x^2 - I_m - m \left(x + a\right)^2$$

ma sappiamo che il momento di inerzia minimo si ottiene quando x coincide con il centro di massa. Quindi

$$\frac{dI_x}{dx} = 2 M_p x - 2m \left(x + a\right) = 0$$

e quindi

$$x = \frac{m}{M_p - m} a = d$$

In ogni caso svolgendo i calcoli si ottiene

$$I = \frac{1}{2}M\left[\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right) - 2\left(\frac{a^2}{R^2}\right)\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2}\right]R^2$$

Domanda 2

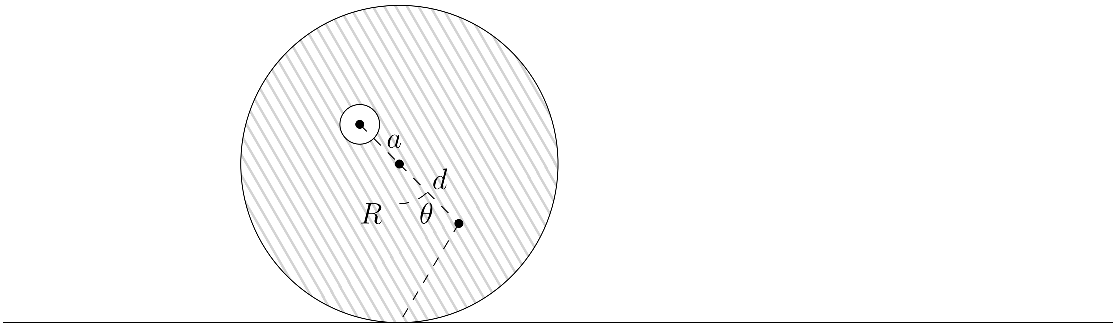


Figura 3.1.: La coordinata scelta per descrivere il moto del sistema.

Scegliendo come coordinata l'angolo di rotazione possiamo scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

dove I_O è il momento di inerzia del corpo rispetto al punto di appoggio. Questo si può ottenere applicando il teorema di Steiner al risultato della domanda precedente

$$I_O = I + M\ell^2$$

dove ℓ è la distanza del centro di massa dal punto di appoggio, ossia (vedere Figura 3.1)

$$\ell^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta$$

Di conseguenza

$$E = \frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2+R^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

Derivando rispetto al tempo

$$E = \dot{\theta}\left[I + M\left(d^2+R^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} - \dot{\theta}\left[MRd\sin\theta\right]\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}Mgd\sin\theta = 0$$

otteniamo l'equazione del moto

$$\left[I + M\left(d^2+R^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} - MRd\dot{\theta}^2\sin\theta + Mgd\sin\theta = 0$$

Domanda 3

Al momento di un eventuale distacco la componente verticale dell'accelerazione del centro di massa del sistema vale $-g$. Dato che

$$y_{cm} = -d\cos\theta$$

abbiamo

$$\ddot{y}_{cm} = d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta = -g$$

Dato che $\ddot{\theta}$ non dipende da ω_0, e $\dot{\theta}^2$ cresce con ω_0, vediamo che l'equazione precedente ha sicuramente soluzioni per ω_0 abbastanza grandi e $\cos\theta < 0$.

Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta = \frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\right)\right]\omega_0^2 - Mgd$$

otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\right)}{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)}\omega_0^2 - \frac{2Mgd\left(1 - \cos\theta\right)}{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)} = F(\theta)$$

e derivando rispetto al tempo ambo i membri abbiamo

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{dF}{d\theta}$$

Sostituendo otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{dF(\theta)}{d\theta}\sin\theta + F(\theta)\cos\theta = -\frac{g}{d}$$

Per semplificare l'equazione assumiamo che il distacco avvenga a $\theta = \pi$. Otteniamo allora $F(\pi) = g/d$ ossia

$$\omega_0^2 \geq \frac{g}{d}\left[\frac{I + M\left(d+R\right)^2}{I + M\left(d-R\right)^2} + \frac{4Md^2}{I + M\left(d-R\right)^2}\right]$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che le pressioni dei due scomparti sono identiche (equilibrio meccanico) abbiamo

$$\frac{T_0}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

e

$$V_1 + V_2 = V$$

quindi

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{T_0}{T_0+T_2}V \\
V_2 &= \frac{T_2}{T_0+T_2}V
\end{aligned}
$$

Domanda 2

La trasformazione del gas nello scomparto a sinistra è isoterma, quella del gas nello scomparto a destra adiabatica. Il lavoro fatto sul sistema è fatto sul pistone, e deve essere uguale e opposto al lavoro fatto, sempre sul pistone, dai due gas. Quindi

$$W = -L_1 - L_2$$

Il lavoro fatto dal gas a sinistra vale

$$L_1 = nRT_0 \int_{V_1}^{V_{1f}} \frac{dV}{V} = nRT_0 \log \frac{V_{1f}}{V_1} = nRT_0 \log \frac{V - V_{2f}}{V_1}$$

e quello fatto dal gas a destra (tenendo conto che la sua temperatura finale è T_0)

$$L_2 = -\Delta U_2 = nc_V\left(T_2 - T_0\right)$$

Determiniamo il volume finale V_{2f}. Dato che la trasformazione del gas a destra è adiabatica abbiamo

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_{2f}^{\gamma-1}$$

e quindi

$$V_{2f} = V_2\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
W &= -nRT_0 \log \frac{V - V_{2f}}{V_1} - nc_V\left(T_2 - T_0\right) \\
&= -nRT_0 \log \frac{V - V_2\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{V_1} - nc_V\left(T_2 - T_0\right) \\
&= -nRT_0 \log \left\{1 + \frac{T_2}{T_0}\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\right\} - nc_V\left(T_2 - T_0\right)
\end{aligned}
$$

Domanda 3

Detto dQ_1 il calore ceduto allo scomparto a sinistra e dQ_2 quello ceduto allo scomparto a destra abbiamo

$$dW = -dQ_2 - dQ_1$$

e d'altra parte

$$dQ_2 = dU_2 + P_2 dV_2$$

ma $P_2 = P_1$ e $dV_2 = -dV_1$ quindi

$$dQ_2 = nc_V dT_2 - P_1 dV_1 = nc_V dT_2 - nRT_0 \frac{dV_1}{V_1}$$

Integrando abbiamo

$$W = -Q_2 - Q_1 = nc_V (T_2 - T_0) + nRT_0 \log \frac{V_{1f}}{V_1} - Q_1$$

Per calcolare il calore totale ceduto allo scomparto a sinistra osserviamo che per ottenere il massimo lavoro si deve operare reversibilmente, quindi l'entropia totale del sistema non deve cambiare

$$dS = \frac{dQ_1}{T_0} + dS_2 = 0$$

Integrando abbiamo

$$Q_1 = -T_0 \Delta S_2$$

ma

$$\Delta S_2 = nc_V \log \frac{T_0}{T_2} + nR \log \frac{V_{2f}}{V_2}$$

In conclusione

$$W = nc_V (T_2 - T_0) + nRT_0 \log \frac{V_{1f}}{V_1} + nc_V T_0 \log \frac{T_0}{T_2} + nRT_0 \log \frac{V_{2f}}{V_2}$$

Nello stato finale $T_1 = T_2 = T_0$ e quindi otteniamo, utilizzando le formule ottenute nella soluzione della prima domanda,

$$\begin{aligned} \frac{V_{1f}}{V_1} &= \frac{1}{2} \frac{T_0 + T_2}{T_0} \\ \frac{V_{2f}}{V_2} &= \frac{1}{2} \frac{T_0 + T_2}{T_2} \end{aligned}$$

ed in conclusione

$$W = nc_V T_0 \left[\left(\frac{T_2}{T_0} - 1 \right) - \log \frac{T_2}{T_0} \right] + nRT_0 \log \frac{1}{4} \left(\frac{T_0}{T_2} + \frac{T_2}{T_0} \right)^2$$