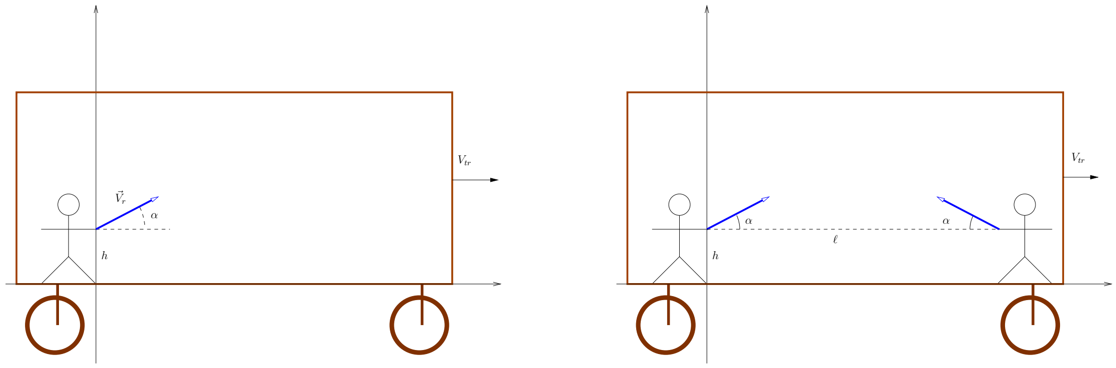
4.3. 4 novembre 2009

Problema 1 (15 punti)



All'interno di un vagone ferroviario che si muove con velocità costante V_{tr} viene lanciato un oggetto la cui velocità iniziale relativa al vagone forma un angolo α rispetto all'orizzontale ed ha modulo V_r. Al momento del lancio l'oggetto si trova ad una altezza h rispetto al pavimento del vagone (in figura, a sinistra).

1. Determinate dopo quanto tempo l'oggetto arriva sul pavimento, in funzione di $\vec{V}_r$.

2. Fissate adesso il sistema di riferimento $\mathcal{R}$ di un osservatore esterno, scegliendolo in modo che all'istante del lancio l'origine sia sul pavimento del treno e sulla verticale dell'oggetto. Calcolate la gittata osservata in $\mathcal{R}$.

3. Supponete adesso che vengano lanciati due oggetti dai due estremi del vagone (di lunghezza ℓ), sempre da una altezza iniziale h. La velocità dei due oggetti relativa al vagone ha la stessa componente verticale ma componente orizzontale opposta (in figura, a destra). Sotto quali condizioni, e dopo quanto tempo i due oggetti si scontrano?

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale si muove nel piano con una legge oraria data, in coordinate cartesiane, da

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\theta(t) \\ B\sin\theta(t) \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

dove A, B sono due costanti e $\theta(t)$ una funzione incognita del tempo, crescente e illimitata superiormente.

1. Determinare la traiettoria del punto materiale.

2. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria, in funzione di θ.

3. Ponendo $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, con ω e θ_0 costanti, mostrare che il vettore accelerazione è proporzionale al vettore posizione, $\vec{a}(t) = K\vec{r}(t)$, e determinare la costante K.

Soluzione primo problema

Problema 1

La legge oraria per il moto in direzione verticale si scrive

$$y(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4.3.2}$$

e il tempo t_V a cui l'oggetto arriva sul pavimento si determina ponendo $y(t_V) = 0$:

$$t_V^2 - \frac{2V_r \sin\alpha}{g} t_V - \frac{2h}{g} = 0 \tag{4.3.3}$$

Risolvendo si ottiene

$$t_V = \frac{V_r \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_r \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \tag{4.3.4}$$

dove la soluzione $t_V < 0$ deve essere scartata. Quindi

$$t_V = \frac{V_r \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_r \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \tag{4.3.5}$$

Problema 2

Nel sistema scelto le leggi orarie sono date da

$$x(t) = (V_r \cos\alpha + V_{tr})\, t \tag{4.3.6}$$

$$y(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4.3.7}$$

La prima equazione descrive un moto uniforme con velocità data dalla somma della velocità dell'oggetto rispetto al treno e di quella di quest'ultimo. La seconda un moto uniformemente accelerato (l'accelerazione è la stessa nel sistema di riferimento solidale al vagone e in $\mathcal{R}$, come anche la velocità verticale).

Considerando la seconda equazione si vede che il tempo di volo è quello determinato all'esercizio precedente. Sostituendo quest'ultimo nella prima equazione troviamo la gittata

$$d = x(t_V) = (V_r \cos\alpha + V_{tr}) \frac{V_r \sin\alpha}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_r^2 \sin^2\alpha}}\right] \tag{4.3.8}$$

Problema 3

L'istante a cui i due oggetti si scontrano non dipende dal sistema di riferimento. Ponendosi nel sistema del vagone abbiamo per il primo oggetto

$$x_1(t) = V_r \cos\alpha\, t \quad (4.3.9)$$

$$y_1(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4.3.10)$$

e per il secondo

$$x_2(t) = \ell - V_r \cos\alpha\, t \quad (4.3.11)$$

$$y_2(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4.3.12)$$

Notare che è sempre $y_1(t) = y_2(t)$. Per determinare l'istante dello scontro è sufficiente porre $x_1(t_S) = x_2(t_S)$, cioè

$$t_S = \frac{\ell}{2V_r \cos\alpha} \quad (4.3.13)$$

Una prima condizione da imporre è $t_S > 0$, che significa $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Inoltre lo scontro deve avvenire al di sopra del pavimento, quindi $y_{1,2}(t_S) > 0$. Questo significa

$$h + \frac{\ell \sin\alpha}{2\cos\alpha} - \frac{g\ell^2}{8V_r^2 \cos^2\alpha} > 0 \quad (4.3.14)$$

che si può anche scrivere

$$\tan^2\alpha - \frac{4V_r^2}{g\ell}\tan\alpha - \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right) < 0 \quad (4.3.15)$$

ed ha per soluzione

$$\frac{2V_r^2}{g\ell} - \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell}\right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right)} < \tan\alpha < \frac{2V_r^2}{g\ell} + \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell}\right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right)} \quad (4.3.16)$$

Soluzione secondo problema

Problema 1

Elevando al quadrato $x(t)$ e $y(t)$ otteniamo

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2\theta \quad (4.3.17)$$

$$\frac{y^2}{B^2} = \sin^2\theta \quad (4.3.18)$$

e sommando membro a membro abbiamo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{4.3.19}$$

che è l'equazione di un'ellisse. Dato che θ è crescente e illimitata superiormente il punto materiale la percorrerà integralmente e ripetutamente.

Problema 2

Possiamo calcolare la velocità

$$\vec{v} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.20}$$

l'accelerazione

$$\vec{a} = \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -A\cos\theta \\ -B\sin\theta \end{pmatrix} + \ddot{\theta} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.21}$$

il versore tangente alla traiettoria

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.22}$$

e quello normale

$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} B\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.23}$$

Abbiamo quindi per il raggio di curvatura

$$\frac{v^2}{\rho} = \vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{AB\dot{\theta}^2}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \tag{4.3.24}$$

ossia, tenendo conto che $v^2 = \dot{\theta}^2\left(A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{AB}{\left(A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right)^{3/2}} \tag{4.3.25}$$

Notare che se $A = B = R$ la traiettoria si riduce a una circonferenza, e $\rho = R$.

Problema 3

Abbiamo

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t + \theta_0) \\ B\sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.26}$$

e derivando ripetutamente rispetto al tempo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) \\ B\omega \cos(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.27}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \\ -B\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.28}$$

Quindi $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, e $K = -\omega^2$.