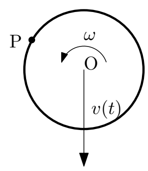
4.7. 8 febbraio 2012

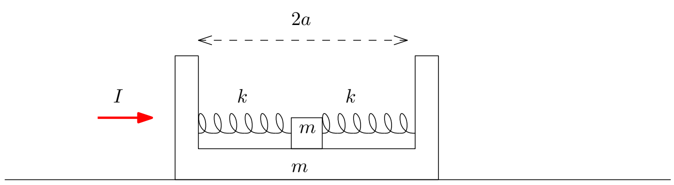
Problema 1 (15 punti)



Il centro di una moneta di raggio R, inizialmente fermo, cade con accelerazione costante $\vec{a} = -g\hat{y}$ verso il basso come in figura. La moneta inoltre ruota con una velocità angolare costante ω.

1. Scrivere il modulo della velocità del punto P posto sul bordo della moneta in funzione del tempo, sapendo che all'istante iniziale si trova sulla verticale del centro O, al di sopra di esso.
2. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con velocità nulla, se esiste.
3. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con accelerazione nulla, se esiste.

Problema 2 (15 punti)



Un contenitore di massa m della forma in figura ospita al suo interno un corpo puntiforme, pure di massa m. Il corpo può muoversi senza attrito sul fondo, che ha una lunghezza totale $2a$, ed è fissato ai due bordi da molle di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k. Inizialmente il contenitore è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, e anche il corpo si trova all'interno in quiete nella posizione di equilibrio.

1. In un tempo molto breve si applica al contenitore un impulso orizzontale I. Determinare nell'istante immediatamente successivo la velocità del contenitore e quella del corpo all'interno.
2. Per quale valore minimo di I il corpo all'interno urta contro le pareti?
3. Se tra corpo e contenitore esistesse attrito, quale frazione dell'energia cinetica iniziale del sistema verrebbe dissipata?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il moto del punto P sarà dato dalla composizione del moto circolare uniforme attorno ad O e di quello uniformemente accelerato di quest'ultimo. Quindi, ponendo la posizione iniziale di O nell'origine di un sistema di coordinate,

$$\begin{aligned} x &= -R\sin\omega t \\ y &= R\cos\omega t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e derivando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\cos\omega t \\ \dot{y} &= -R\omega\sin\omega t - gt \end{aligned}$$

da cui otteniamo il modulo della velocità

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + g^2t^2 + 2R\omega gt\sin\omega t}$$

Domanda 2

Dato il centro di massa si muove ad un dato istante con una velocità $\vec{v} = -gt\hat{y}$ un punto della moneta potrà essere fermo solo se questa velocità verticale è compensata da quella del suo moto circolare. Questo può accadere solo sul diametro orizzontale della moneta, dove la velocità del moto circolare non ha componenti orizzontali. Inoltre indicando con d la posizione sul diametro relativa ad O di P dovrà essere

$$\omega d - gt = 0$$

e quindi $d = gt/\omega$. Il punto cercato esisterà solo per $d \le R$, e quindi per $t < \omega R/g$.

Domanda 3

In questo caso è l'accelerazione del moto circolare che deve compensare quella uniforme del centro di massa. Quindi il punto si troverà sul diametro verticale della moneta (dove l'accelerazione centripeta non ha componenti orizzontali) e dovrà essere

$$-\omega^2 d - g = 0$$

dove d è ancora la posizione sul diametro di P relativa ad O. In conclusione

$$d = -\frac{g}{\omega^2}$$

ed il punto cercato esisterà sempre, a condizione che $\omega^2 > g/R$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo il corpo all'interno del contenitore non ne risente, e qindi la sua velocità resta nulla. Per la velocità del contenitore abbiamo invece

$$mv_c = I$$

Domanda 2

Usando il teorema di Koenig l'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{x}_r^2 + \frac{k}{2}(x_r - a)^2 + \frac{k}{2}(x_r + a)^2$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa (costante) e x_r la posizione del corpo relativa al centro del contenitore. Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

e al momento dell'urto ($x_r = -a$), nel caso limite in cui la velocità relativa si annulla,

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{k}{2}4a^2$$

Usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{m}{4}v_c^2 = ka^2$$

e quindi

$$I = mv_c = m\sqrt{\frac{4ka^2}{m}}$$

Domanda 3

L'energia dissipata sarebbe quella cinetica disponibile nel centro di massa. La frazione rispetto alla cinetica totale sarà

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2}{\frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2} = \frac{v_c^2}{4v_{cm}^2 + v_c^2} = \frac{I^2}{I^2 + 4\frac{I^2}{4}} = \frac{1}{2}$$