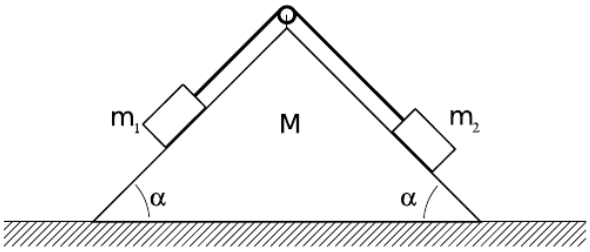
5.5. 14 dicembre 2011

Problema 1 (15 punti)



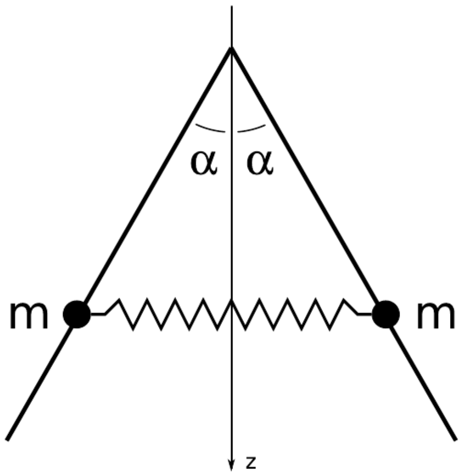
Un cuneo di massa M triangolare simmetrico come in figura è appoggiato su un piano orizzontale su cui può scorrere senza attrito. Sulla sommità del cuneo è fissata una carrucola su cui scorre una fune ideale, a cui sono appesi due corpi di masse m_1 e m_2 come in figura. Le due masse possono scorrere senza attrito sulle superfici laterali del cuneo.

1. Supponendo in un primo momento che il cuneo venga tenuto fermo da una opportuna forza esterna orizzontale F_x, calcolare le accelerazioni delle due masse.

2. Calcolare la forza F_x di cui al punto precedente.

3. Assumendo ora che la forza esterna venga rimossa, calcolare l'accelerazione del cuneo.

Problema 2 (15 punti)



Due corpi puntiformi di uguale massa sono vincolati a muoversi lungo due guide rettilinee inclinate di un angolo α rispetto alla verticale, come in figura. Le due massa sono collegate da una molla ideale di lunghezza a riposo ℓ_0 e costante elastica k. Si assuma che durante tutto il moto le due masse rimangano allineate orizzontalmente una rispetto all'altra.

1. Scrivere l'energia meccanica del sistema. E' conservata?
2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio e dire se sono stabili o instabili.
3. Le due masse si trovano inizialmente in quiete nella giunzione tra le due guide, e vengono lasciate libere. Determinare l'allungamento massimo della molla relativo alla lunghezza di riposo

Soluzione primo problema

Domanda 1

Le equazioni del moto per le due masse nella direzione parallela al piano si scrivono

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \sin\alpha \\ m_2 a_2 &= -T + m_2 g \sin\alpha \end{aligned}$$

dove a_1 e a_2 sono le componenti delle accelerazioni parallele al piano (le uniche diverse da zero), prese positive da sinistra verso destra. Per l'inestensibilità del filo $a_1 = a_2 \equiv a$. Sommando membro a membro otteniamo

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)\, g \sin\alpha$$

e quindi

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \sin\alpha$$

Domanda 2

La componente orizzontale della accelerazione del centro di massa del sistema è data da

$$a_{cm,x} = \frac{m_1 a \cos\alpha + m_2 a \cos\alpha}{m_1 + m_2 + M}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F_x &= (m_1 + m_2 + M)\, a_{cm,x} \\ &= (m_1 + m_2)\, a \cos\alpha \\ &= (m_2 - m_1)\, g \sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

Domanda 3

Detta A l'accelerazione del cuneo abbiamo

$$a_{cm,x}=\frac{m_1\left(A+a\cos\alpha\right)+m_2\left(A+a\cos\alpha\right)+MA}{m_1+m_2+M}=0 \tag{5.5.1}$$

dove adesso a è la componente parallela al piano dell'accelerazione dei due corpi relativa al cuneo. Le equazioni del moto delle due masse si possono scrivere in un sistema di riferimento solidale al cuneo

$$\begin{aligned} m_1 a &= T-m_1 g\sin\alpha-m_1 A\cos\alpha \\ m_2 a &= -T+m_2 g\sin\alpha-m_2 A\cos\alpha \end{aligned}$$

e sommando membro a membro abbiamo ancora

$$a+A\cos\alpha=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g\sin\alpha$$

Ricavando a e sostituendo nell'Equazione (5.5.1) abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(m_1+m_2+M\right)A+\left(m_1+m_2\right)a\cos\alpha \\ &= \left(m_1+m_2+M\right)A+\left(m_1+m_2\right)\cos\alpha\left[\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g\sin\alpha-A\cos\alpha\right] \\ &= \left[m_1+m_2+M-\left(m_1+m_2\right)\cos^2\alpha\right]A+\left(m_2-m_1\right)g\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

da cui

$$A=\frac{\left(m_1-m_2\right)\sin\alpha\cos\alpha}{\left(m_1+m_2\right)\sin^2\alpha+M}g$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Utilizzando la distanza s di ciascuna massa dal vertice come coordinata abbiamo

$$E=\frac{1}{2}2m\dot{s}^2-2mgs\cos\alpha+\frac{1}{2}k\left(2s\sin\alpha-\ell_0\right)^2$$

che si conserva dato che le reazioni vincolari non fanno lavoro sul sistema, essendo sempre perpendicolari agli spostamenti delle masse.

Domanda 2

Le posizioni di equilibrio stabile corrispondono ai minimi del potenziale, quelle instabili ai massimi. Il potenziale vale

$$U(s)=2k\sin^2\alpha\left(s-\frac{\ell_0}{2\sin\alpha}\right)^2-2mgs\cos\alpha$$

che ha un unico minimo quando

$$\frac{dU}{ds} = 4k\sin^2\alpha\left(s - \frac{\ell_0}{2\sin\alpha}\right) - 2mg\cos\alpha = 0$$

cioè per

$$s = \frac{mg\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha} + \frac{\ell_0}{2\sin\alpha}$$

Domanda 3

Usiamo la conservazione dell'energia. Inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}k\ell_0^2$$

e nell'istante di massimo allungamento della molla le masse sono nuovamente ferme, per cui

$$E_f = -2mgs\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(2s\sin\alpha - \ell_0\right)^2$$

In conclusione da $E_i = E_f$ segue

$$-2mgs\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(2s\sin\alpha - \ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\ell_0^2$$

cioè

$$s\left[2ks\sin^2\alpha - 2k\ell_0\sin\alpha - 2mg\cos\alpha\right] = 0$$

Il valore di s che corrisponde al massimo allungamento è quindi

$$s = \frac{k\ell_0\sin\alpha + mg\cos\alpha}{k\sin^2\alpha}$$

e quest'ultimo sarà dato da

$$\begin{aligned}
\Delta\ell &= 2\sin\alpha\frac{k\ell_0\sin\alpha + mg\cos\alpha}{k\sin^2\alpha} - \ell_0 \\
&= \frac{k\ell_0\sin\alpha + 2mg\cos\alpha}{k\sin\alpha} \\
&= \ell_0 + \frac{2mg\cos\alpha}{k\sin\alpha}
\end{aligned}$$