6.1. 1 aprile 2009

Problema 1 (15 punti)

In un semplice modello per una galassia ciascuna stella si muove in un'orbita circolare, sotto l'azione di un potenziale centrale $U(r)$ che tiene conto delle interazioni gravitazionali con le rimanenti. Le osservazioni mostrano che la velocità di una stella dipende dalla sua distanza dal centro della galassia come

$$V(r) = \sqrt{\frac{K}{1+\frac{r}{r_0}}} \tag{6.1.1}$$

dove K e r_0 sono costanti positive.

1. Determinare il potenziale $U(r)$ che potrebbe spiegare i dati sperimentali.
2. Studiare qualitativamente le orbite nel potenziale $U(r)$, dicendo in particolare se sono possibili orbite illimitate.
3. Supponendo che la galassia sia approssimabile con una distribuzione sferica di massa, determinarne la massa totale studiando il comportamento di $V(r)$ per $r \gg r_0$.

Problema 2 (15 punti)

Un'asta di lunghezza ℓ e massa m è fissata a una parete verticale attraverso un giunto elastico con momento di richiamo $M = -k\theta$, dove θ è l'angolo con il quale si deforma il giunto. Si suppone il giunto sufficientemente rigido per cui gli angoli sono piccoli. In assenza di gravità l'asta è perpendicolare alla parete.

1. Calcolare la posizione di equilibrio sotto l'influenza della gravità e il periodo delle piccole oscillazioni.
2. La parete si muove con moto sinusoidale di ampiezza y_0 con frequenza ω. Si calcoli l'ampiezza del moto a regime dell'asta.
3. Il giunto ha una dissipazione viscosa che genera un momento $M_v = -\gamma\dot{\theta}$. Si calcoli l'ampiezza e la fase del moto a regime dell'asta in funzione di ω. Qual'è l'energia dissipata per ciclo?

Soluzione primo problema

Domanda 1

La forza radiale che agisce su una stella è data da

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

e deve essere uguale all'accelerazione radiale. Per un'orbita circolare abbiamo quindi

$$-m\frac{V^2(r)}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

ossia

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{mK}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)}$$

Integrando troviamo il potenziale, a meno di una costante inessenziale:

$$\begin{aligned} U &= mK\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+r_0}\right)dr \\ &= -mK\log\left(1+\frac{r_0}{r}\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - mK\log\left(1+\frac{r_0}{r}\right)$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} U_{eff}(r) &= +\infty \\ \lim_{r\to +\infty} U_{eff}(r) &= 0 \end{aligned}$$

Inoltre la derivata

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{mKr_0}{r\,(r+r_0)}$$

si annulla se

$$r^2 - \frac{L^2}{Km^2r_0}r - \frac{L^2}{Km^2} = 0$$

cioè quando

$$r = \frac{L^2}{2Km^2r_0} + \sqrt{\left(\frac{L^2}{2Km^2r_0}\right)^2 + \frac{L^2}{Km^2}} \equiv r^*$$

Il potenziale ha quindi un minimo in r^*, che deve corrispondere ad un valore negativo del potenziale efficace. Abbiamo quindi, in termini dell'energia totale E,

1. orbite circolari quando $E = U_{eff}(r^*)$
2. orbite limitate quando $U_{eff}(r^*) < E < 0$
3. orbite illimitate (che si avvicinano al centro fino ad un raggio minimo) per $E \geq 0$

Domanda 3

Per $r \gg r_0$ possiamo approssimare

$$V(r) \simeq \sqrt{\frac{Kr_0}{r}}$$

ma d'altra parte a grande distanza dalla galassia la forza gravitazionale deve essere

$$F_r \simeq -\frac{GmM}{r^2}$$

e quindi dall'equazione del moto

$$-m\frac{V^2}{r} = F_r$$

troviamo

$$m\frac{Kr_0}{r^2} \simeq \frac{GmM}{r^2}$$

ossia

$$M = \frac{Kr_0}{G}$$

Da un altro punto di vista per $r \gg r_0$

$$U(r) \simeq -\frac{mKr_0}{r}$$

che è l'energia potenziale del campo gravitazionale generato dalla massa M appena determinata.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Scegliendo il polo nel giunto possiamo scrivere la seconda equazione cardinale nella forma

$$I\ddot{\theta} = -k\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

dove l'angolo θ e quello tra la sbarra e la direzione orizzontale. All'equilibrio deve essere

$$k\theta_0 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta_0 = 0$$

e per piccoli angoli possiamo approssimare $\cos\theta_0 \simeq 1$ da cui

$$\theta_0 = -\frac{mg\ell}{2k}$$

Ponendo $\theta = \theta_0 + \epsilon$ abbiamo infine

$$I\ddot{\epsilon} = -k\epsilon$$

e per la frequenza delle piccole oscillazioni

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m\ell^2}}$$

dove abbiamo utilizzato il valore del momento di inerzia della sbarra rispetto ad un suo estremo

$$I = \frac{m\ell^2}{3}$$

Domanda 2

Nel sistema di riferimento della parete abbiamo la forza apparente dovuta alla accelerazione, e l'equazione del moto diventa

$$I\ddot{\epsilon} + k\epsilon = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2} \sin\omega_0 t$$

A regime abbiamo dunque

$$\epsilon(t) = \frac{m\omega_0^2 y_0 \ell}{2\left(k - I\omega_0^2\right)} \sin\omega_0 t$$

Domanda 3

In questo caso l'equazione del moto diviene

$$I\ddot{\epsilon} + \gamma\dot{\epsilon} + k\epsilon = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2} \sin\omega_0 t$$

e la soluzione a regime sarà

$$\epsilon(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{m\ell\omega_0^2 y_0 e^{i\omega_0 t}}{2\left(k + \gamma i\omega_0 - \omega_0^2\right)}\right)$$

L'ampiezza dell'oscillazione sarà dunque

$$A = \left|\frac{m\ell\omega_0^2 y_0}{2\left(k + \gamma i\omega_0 - \omega_0^2\right)}\right| = \frac{m\ell\omega_0^2 y_0}{2\sqrt{\left(k - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega_0^2}}$$

e la fase

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega_0}{\omega_0^2 - k}$$

L'energia dissipata in un ciclo si ottiene osservando che se si moltiplica membro a membro l'equazione del moto per $\dot{\epsilon}$

$$I\ddot{\epsilon}\dot{\epsilon} + \gamma\dot{\epsilon}^2 + k\epsilon\dot{\epsilon} = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2}\dot{\epsilon}\sin\omega_0 t$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}k\epsilon^2\right) = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2}\dot{\epsilon}\sin\omega_0 t - \gamma\dot{\epsilon}^2$$

Il primo termine a destra è la potenza della forzante, e il secondo la potenza dissipata. L'integrale al secondo membro su un ciclo si deve annullare a regime. In ogni caso l'energia dissipata in un ciclo sarà

$$\begin{aligned} E_{diss} &= -\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \dot{\epsilon}^2 dt \\ &= -\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} A^2\omega_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right) dt \\ &= -\gamma\pi A^2\omega_0 \end{aligned}$$