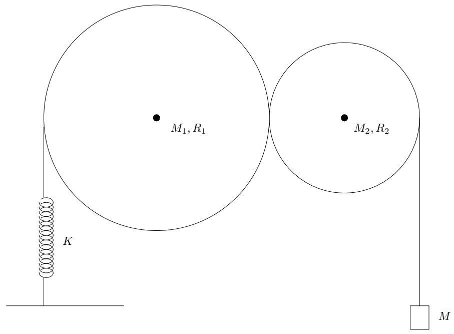
6.3. 13 aprile 2011

Problema 1 (15 punti)



I due dischi in figura, di massa M_1, M_2 e raggio R_1, R_2 sono vincolati a ruotare intorno ai loro centri e lo fanno senza strisciare uno sull'altro. Una massa M è appesa a un filo inestensibile avvolto al disco di destra, il sinistro è collegato mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso.

1. Il sistema è inizialmente in quiete, e l'allungamento della molla è nullo. Viene lasciato libero di muoversi: calcolare di quanto si abbassa al massimo la massa M.

2. Mostrare che il sistema è equivalente ad un oscillatore armonico, e determinarne la frequenza.

3. Se sulla massa M agisce una forza di attrito viscoso $F = -\lambda v$, dove λ è una costante positiva dalle opportune dimensioni, valutare il fattore di qualità dell'oscillatore.

Problema 2 (15 punti)

Un satellite di massa m si trova in orbita circolare attorno alla terra, la durata del periodo è 24h. La massa del satellite è molto minore della massa della terra, $m \ll M_T = 6 \times 10^{24}$kg.

1. Determinare il raggio dell'orbita, sapendo che la costante di gravitazione universale vale $G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

2. Mediante un opportuno impulso $\vec{I}$ applicato istantaneamente in direzione tangenziale si vuole portare il satellite su un'orbita parabolica. Determinare $\vec{I}$.

3. Supponendo nuovamente il satellite in orbita circolare come al punto 1., lo si vuole portare su un'orbita circolare di raggio doppio, applicando ad opportuni istanti due impulsi $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$, passando attraverso un'orbita ellittica intermedia. Calcolare $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ supponendoli entrambi applicati in direzione tangenziale.

Soluzione primo problema

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}\delta^2$$

dove ω_1, ω_2 sono le velocità angolari dei due cilindri ed y l'altezza della massa misurata rispetto alla posizione iniziale. La deformazione della molla δ è data da $\delta = y$ a causa della condizione di rotolamento puro. Uguagliando l'energia iniziale a quella nella posizione di massimo allungamento abbiamo

$$Mgy + \frac{K}{2}y^2 = 0$$

da cui otteniamo il massimo abbassamento

$$y = -\frac{2Mg}{K}$$

Domanda 2 Le condizioni di rotolamento puro sono

$$\begin{aligned}\omega_1 R_1 &= -\omega_2 R_2 \\ \omega_2 R_2 &= \dot{y}\end{aligned}$$

da cui segue che l'energia può essere scritta nella forma (usando $I_1 = M_1 R_1^2/2$ e $I_2 = M_2 R_2^2/2$)

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}y^2$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}\ddot{y} + Mg\dot{y} + Ky\dot{y} = 0$$

troviamo le equazioni del moto

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

che sono quelle di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante. La frequenza sarà dunque

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{2M + M_1 + M_2}}$$

Non volendo utilizzare l'energia, possiamo scrivere direttamente le equazioni del moto. Per la massa sospesa abbiamo

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

dove T è la tensione del filo. La seconda equazione cardinale per il primo cilindro si scrive

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -KR_1^2\theta_1 + FR_1$$

dove F è la forza applicata al punto di contatto e θ_1 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. Per il secondo abbiamo

$$I_2\ddot{\theta}_2 = FR_2 - TR_2$$

dove θ_2 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. La condizione di puro rotolamento si scrive

$$R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2$$

ossia

$$R_1\theta_1 = -R_2\theta_2$$

Inoltre

$$y = R_2\theta_2$$

Esprimendo tutte le equazioni in funzione di y abbiamo

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -Mg + T \\ I_1\ddot{y} &= -KR_1^2 y - FR_1^2 \\ I_2\ddot{y} &= FR_2^2 - TR_2^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)\ddot{y} = -Mg - Ky$$

ossia

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

Domanda 3 In presenza di attrito viscoso l'equazione del moto diventa

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + \lambda\dot{y} + Ky = -Mg$$

Il fattore di qualità è dato dal prodotto

$$Q = \omega\tau$$

dove τ è il tempo di smorzamento,

$$\tau = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}$$

Quindi

$$Q = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}\sqrt{\frac{K}{M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{2K\left(2M + M_1 + M_2\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 L'equazione del moto in direzione radiale si scrive

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM_T}{R^2}$$

e d'altra parte per il periodo vale

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

da cui

$$R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq \left(\frac{6.7\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}\times (24\times 60\times 60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \mathrm{m} \simeq 4.2\times 10^7 \mathrm{m}$$

Domanda 2 Prima di applicare l'impulso l'energia vale

$$E = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

dato che l'orbita è circolare. Inoltre sappiamo che il potenziale effettivo è minimo,

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}\right) = -\frac{L^2}{mR^3} + \frac{k}{R^2} = 0$$

da cui

$$L^2 = kmR$$

Applicando l'impulso cambiamo il momento angolare di $\Delta L = IR$. Dato che la velocità radiale resta nulla la nuova energia vale

$$E' = \frac{(L + IR)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

e per avere un'orbita parabolica deve essere $E' = 0$. Quindi (supponendo $L > 0$) otteniamo

$$\left(\sqrt{kmR} + IR\right)^2 = 2kmR$$

da cui

$$I = -\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Si può quindi applicare l'impulso con lo stesso verso della velocità

$$I = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

oppure in verso opposto

$$I = -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Domanda 3 Applicando il primo impulso si ottiene un'orbita ellittica che deve avere il perigeo in R e l'apogeo in $2R$. Per ottenere questo l'equazione

$$E_1 = \frac{(L+I_1R)^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

deve essere verificata in $r = R$ e $r = 2R$, ossia

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(L+I_1R)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R} \\ E_1 &= \frac{(L+I_1R)^2}{8mR^2} - \frac{k}{2R} \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{3}{8}\frac{(L+I_1R)^2}{mR^2} - \frac{k}{2R} = 0$$

da cui

$$I_1 = -\left(1 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Il secondo impulso deve essere applicato all'apogeo, in modo da ottenere un'orbita circolare di raggio $2R$ e quindi un momento angolare

$$L' = \pm\sqrt{2kmR}$$

Se vogliamo $L' > 0$ abbiamo dunque le due possibilità determinate da

$$L + RI_1 + 2RI_2 = \sqrt{2kmR}$$

ossia

$$I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

mentre se $L' < 0$ (l'orbita circolare finale è percorsa nel verso opposto di quella iniziale) deve essere

$$L + RI_1 + 2RI_2 = -\sqrt{2kmR}$$

e quindi

$$I_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Riassumendo abbiamo le quattro possibilità in tabella

I_1	I_2
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$