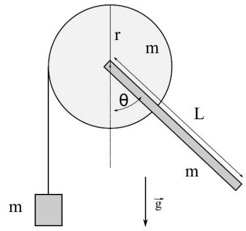
6.4. 18 aprile 2012

Problema 1 (15 punti)



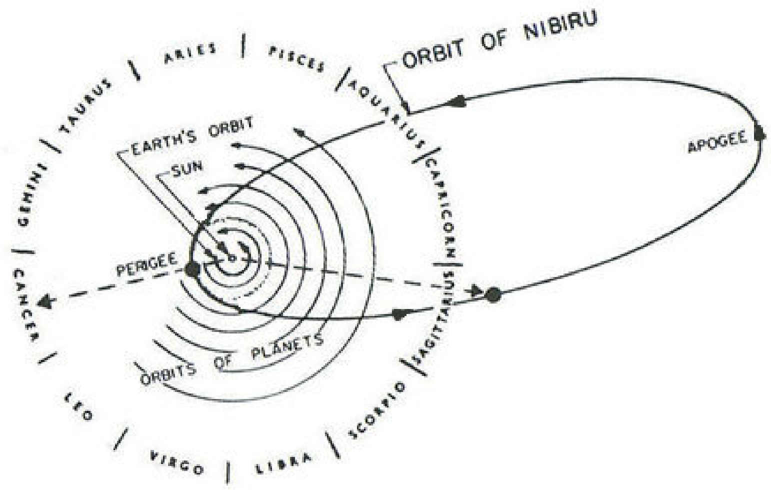
Un'asta omogenea di lunghezza L, massa m e spessore trascurabile è rigidamente connessa ad un disco di raggio r e massa m, come in figura. Il disco è vincolato a ruotare attorno ad un perno fisso passante per il suo centro. Uno degli estremi dell'asta coincide con il centro del disco. Attorno al disco è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, che scorre sul bordo senza strisciare. All'estremità inferiore del filo è sospeso un corpo puntiforme di massa m. Tutti e tre i corpi hanno la stessa massa. Il tutto è immerso in un campo gravitazionale uniforme di intensità g diretto verso il basso.

1. Assumendo che la sbarra sia inizialmente ferma formando un angolo θ_0 noto con la verticale, determinare quali condizioni devono soddisfare i parametri del sistema (m, L e r) affinchè la massa sospesa al filo acceleri verso il basso.

2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio stabile del sistema, determinando che condizioni devono essere soddisfatte dai parametri affinchè esistano.

3. Nell'ipotesi che una posizione di equilibrio stabile esista, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a questa.

Problema 2 (15 punti)



Secondo una teoria accreditata da un grandissimo numero di pagine web ogni 3600 anni il pianeta Nibiru arriva con la sua orbita in prossimità della terra. Il prossimo avvicinamento è previsto da alcuni attorno al primo aprile del 2013. Nel seguito si considereranno solo le interazioni gravitazionali tra la terra e il sole e tra Nibiru e il sole, per semplicità si considererà la massa di Nibiru uguale a quella della terra, e l'orbita di quest'ultima circolare e di raggio $a_T \simeq 1.5 \times 10^{11}$m. Inoltre si supporrà che il perielio di Nibiru e quello della terra coincidano, che le orbite siano nello stesso piano e percorse nello stesso senso.

1. Sulla base dei dati precedenti calcolate il rapporto tra l'afelio di Nibiru e la distanza terra-sole.

2. Modellando l'eventuale scontro tra la terra e Nibiru come un'urto istantaneo completamente anelastico al perielio calcolare la frazione di energia cinetica dissipata durante l'urto.

3. Determinare l'afelio dell'unico pianeta risultante.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il disco ruota soggetto ai momenti di due forze, calcolati rispetto al centro del disco: la forza peso dell'asta e la tensione della fune:

$$I\dot{\omega} = -\frac{L}{2}mg\sin\theta + rT \tag{6.4.1}$$

dove I è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al perno del disco. Per ora non serve calcolarlo. Abbiamo preso come verso positivo per ω quello che determina una rotazione in senso anti-orario. Il moto del corpo appeso al filo è determinato dall'equazione

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{6.4.2}$$

dove z è crescente verso l'alto. Il fatto che la fune non strisci sul disco dà il vincolo:

$$\ddot{z} = -r\dot{\omega} \tag{6.4.3}$$

Sostituendo nell'Equazione (6.4.1) e ricavando T dalla (6.4.2) si ottiene

$$\ddot{z} = mg\frac{\frac{L}{2}\sin\theta - r}{\frac{I}{r} + mr} \tag{6.4.4}$$

Il corpo accelera verso il basso se $\ddot{z} < 0$, ovvero se

$$L < \frac{2r}{\sin\theta} \tag{6.4.5}$$

Domanda 2

Per trovare le posizioni di equilibrio si scrive l'energia potenziale del sistema e si cercano i minimi. L'energia potenziale ha solamente contributi gravitazionali:

$$U = mgz - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mgr\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mg\left(r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right) \tag{6.4.6}$$

dove si è usata la relazione di rotolamento della corda ($r\dot{\theta} = -\dot{z}$) e si è omessa una costante irrilevante. Otteniamo la derivata

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\left(-r + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{6.4.7}$$

che si annulla quando

$$\sin\theta = \frac{2r}{L} \tag{6.4.8}$$

Esiste soluzione solamente se $2r/L < 1$ ovvero $L > 2r$. In questo caso esistono due angoli che danno lo stesso seno, uno compreso tra 0 e $\pi/2$ e l'altro compreso tra $\pi/2$ e π. Per vedere quali posizioni sono di equilibrio stabile, serve la derivata seconda

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg\frac{L}{2}\cos\theta \tag{6.4.9}$$

che è positiva (equilibrio stabile) per $0 < \theta_{eq} < \pi/2$ e negativa (equilibrio instabile) per $\pi/2 < \theta_{eq} < \pi$.

Domanda 3

La frequenza delle piccole oscillazioni si trova ponendo $\theta = \theta_{eq} + \delta$ nell'espressione dell'energia

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\left[r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right] \tag{6.4.10}$$

Sviluppando al secondo ordine si trova

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right) + \frac{L}{2}\cos\left(\theta_{eq}+\delta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right) + \frac{L}{2}\cos\theta_{eq} - \frac{L}{2}\delta\sin\theta_{eq} - \frac{1}{2}\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq}\right] + O(\delta^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq} + \text{costante} + O(\delta^2) \qquad (6.4.11)
\end{aligned}$$

Il momento d'inerzia rispetto al perno è dato dalla somma dei contributi del disco e dell'asta (che si ottiene usando il teorema di Koenig):

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = m\left(\frac{r^2}{2} + \frac{L^2}{3}\right) \tag{6.4.12}$$

La pulsazione delle piccole oscillazioni è data infine da

$$\begin{aligned}
\Omega^2 &= \frac{\frac{L}{2}\cos\theta_{eq}}{I + mr^2} = \frac{mg\frac{L}{2}\sqrt{1-\sin^2\theta_{eq}}}{m\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} \\
&= \frac{g\frac{L}{2}\sqrt{1-\frac{4r^2}{L^2}}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} = \frac{g\sqrt{\frac{L^2}{4} - r^2}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} \qquad (6.4.13)
\end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Conosciamo il periodo T dell'orbita e il perielio. Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{T_N^2}{a_N^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

dove a è il semiasse maggiore. Quindi

$$a_N = \left(\frac{T_N}{T_T}\right)^{2/3} a_T \simeq 234.9\, a_T$$

Indicati con r_- e r_+ il perielio e l'afelio dell'orbita abbiamo

$$r_+ + r_- = 2a$$

e quindi

$$r_+ = 2a_N - a_T \simeq 468.9\, a_T$$

Domanda 2

Al momento dell'urto le velocità radiali sono entrambe nulle, e si conserva il momento angolare totale (o anche la quantità di moto nella direzione tangente all'orbita, che è proporzionale a quest'ultimo). Quindi

$$L_f = L_T + L_N$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è

$$E_i = \frac{L_T^2 + L_N^2}{2m_T a_T^2}$$

e immediatamente dopo l'urto

$$E_f = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

quindi si è dissipata un'energia

$$\Delta E = \frac{2L_T^2 + 2L_N^2 - (L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} = \frac{(L_T - L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2}$$

dove abbiamo indicato con ρ il rapporto

$$\rho = \frac{L_T}{L_N}$$

Dato che (indicando con M_S la massa del sole)

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2m_T r_-^2} - \frac{G m_T M_S}{r_-} \\ E &= \frac{L^2}{2m_T r_+^2} - \frac{G m_T M_S}{r_+} \end{aligned}$$

abbiamo

$$L = \sqrt{2GM_S m_T^2 \left(\frac{r_+ r_-}{r_+ + r_-}\right)}$$

e quindi

$$\rho = \frac{\sqrt{GM_S m_T^2 a_T}}{\sqrt{2GM_S m_T^2 \frac{a_T r_+}{r_+ + a_T}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(a_T + r_+)}{r_+}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1+468.9}{468.9}} \simeq 0.7$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(1-0.7)^2}{1+(0.7)^2} \simeq 0.03$$

Domanda 3

L'orbita dopo l'urto è definita dal valore delle due costanti del moto, l'energia

$$E = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} - \frac{2Gm_T M_S}{a_T}$$

e il momento angolare

$$L = L_T + L_N$$

Il perielio e l'afelio sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{L^2}{4m_T r^2} - \frac{2Gm_T M_S}{r} - E = \frac{L^2}{4m_T}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-}\right) = 0$$

e quindi, dato che una delle due soluzioni concide com a_T, possiamo scrivere per l'altra

$$\frac{L^2}{4m_T}\frac{1}{r}\frac{1}{a_T} = -E$$

cioè

$$\begin{aligned} r &= -\frac{L^2}{4m_T a_T E} = \frac{(L_T + L_N)^2}{\left[8Gm_T^2 M_S a_T - (L_T + L_N)^2\right]} a_T \\ &= \frac{(L_T + L_N)^2}{\left[8L_T^2 - (L_T + L_N)^2\right]} a_T = \frac{(L_T + L_N)^2}{7L_T^2 - 2L_N L_T - L_N^2} a_T \\ &= \frac{(1+\rho)^2}{7\rho^2 - 2\rho - 1} a_T \simeq 2.7 a_T \end{aligned}$$