6.6. 19 febbraio 2014

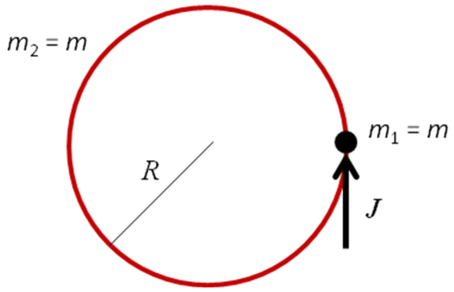

Figura 6.1.: La perla e l'anello considerati nell'esercizio.

Un sistema è costituito da una perla di massa m_1 infilata in un anello omogeneo di raggio R e massa $m_2 = m_1 = m$. Il sistema è appoggiato su un piano orizzontale senza attrito (che coincide col piano dell'anello). Inizialmente il sistema è fermo in un riferimento inerziale solidale col piano di appoggio. Con un colpo secco si impartisce alla perla un impulso J con direzione tangente all'anello.

1. Nell'ipotesi che la perla sia saldata all'anello,
    a) trovare la velocità del centro di massa G del sistema subito dopo l'urto;
    b) calcolare il momento di inerzia del sistema relativo a G, e la distanza di G dal centro dell'anello;
    c) determinare il moto del sistema anello+perla nel riferimento che trasla con il centro di massa.
2. Nell'ipotesi che la perla possa scorrere lungo l'anello con attrito radente con coefficiente d'attrito dinamico μ uguale a quello di attrito statico,
    a) trovare la velocità del centro di massa G del sistema subito dopo l'urto;
    b) trovare la velocità del centro dell'anello e della perlina subito dopo l'urto, sia nel sistema di laboratorio che in quello del centro di massa;
    c) trovare la velocità angolare con la quale l'anello ruota attorno al suo centro subito dopo l'urto;
    d) determinare nel centro di massa la velocità a regime del centro dell'anello, della perlina e la velocità angolare dell'anello attorno al suo centro;
    e) detta F_T la forza tangente all'anello che quest'ultimo esercita sulla perla, e F_N l'analoga forza normale, calcolare il rapporto F_T/F_N.
    f) **************************

Soluzione

1.a

Dato che l'impulso trasferito al sistema è uguale alla variazione della sua quantità di moto abbiamo

$$(m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{J}$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\boldsymbol{J}}{2m}$$

1.b

Ponendo il centro dell'anello nell'origine e la perla sull'asse x ($x > 0$) abbiamo

$$x_G = \frac{0m_2 + Rm_1}{m_1 + m_2} = \frac{R}{2}$$

Questa è anche la distanza cercata. Per calcolare il momento di inerzia sommiamo il contributo dell'anello a quello della perla,

$$I_G = \left[I_{anello} + m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2\right] + \left[I_{perla} + m_1\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$$

dove $I_{anello} = m_2R^2$ e $I_{perla} = 0$ sono i momenti di inerzia dei due corpi rispetto al loro centro di massa e si è utilizzato il teorema di Steiner. In conclusione

$$I_G = \left[m_2R^2 + m_2\frac{R^2}{4}\right] + \left[m_1\frac{R^2}{4}\right] = \frac{3}{2}mR^2$$

1.c

Il sistema è un unico corpo rigido. Dato che dopo l'urto non ci sono forze e momenti esterni si conserva sia la quantità di moto totale che il momento angolare. Quindi il centro di massa si muove a velocità costante ed il sistema di riferimento che trasla con esso è inerziale.

Il momento angolare del corpo nel sistema del laboratorio dopo l'urto è uguale all'impulso angolare di $\boldsymbol{J}$. Scegliendo il polo nel centro di massa abbiamo

$$\boldsymbol{L} = I_G\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{R}{2}\boldsymbol{e}_x\right) \wedge \boldsymbol{J} = \frac{RJ}{2}\boldsymbol{e}_z$$

e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{RJ}{2I_G}\boldsymbol{e}_z = \frac{J}{3mR}\boldsymbol{e}_z$$

Nel sistema del centro di massa il corpo ruoterà attorno ad esso con questa velocità angolare.

2.a

Valgono le stesse considerazioni fatte al punto 1.a, quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\boldsymbol{J}}{2m}$$

2.b

Consideriamo prima di tutto il sistema del laboratorio. Durante l'urto $\boldsymbol{J}$ è applicato alla perla, ed è l'unica forza impulsiva. Quindi la perla avrà dopo l'urto una velocità

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\boldsymbol{J}}{m}$$

Sull'anello non è applicata invece nessuna forza impulsiva, quindi immediatamente dopo l'urto la velocità del suo centro sarà

$$\boldsymbol{v}_A = 0$$

Dato che il centro di massa si muove con la velocità precedentemente determinata, avremo in un sistema di riferimento che trasla con esso

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_P &= \boldsymbol{v}_P - \frac{\boldsymbol{J}}{2m} = \frac{\boldsymbol{J}}{2m} \\
\boldsymbol{v}'_A &= 0 - \frac{\boldsymbol{J}}{2m} = -\frac{\boldsymbol{J}}{2m}
\end{aligned}$$

2.c

Dato che nessun impulso angolare è applicato all'anello durante l'urto avremo

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' = 0$$

2.d

Nel sistema del centro di massa abbiamo la situazione in Figura 6.2.

In ogni istante il centro del disco e la perla si trovano in posizioni opposte relativamente al centro di massa, e compiono un moto circolare con velocità rispettivamente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P &= \frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} \\
\boldsymbol{v}_A &= -\boldsymbol{v}_P
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente all'anello nel punto in cui si trova la perla.

Al tempo stesso l'anello ruota su se stesso con velocità angolare ω. La velocità dell'anello nel punto a contatto con la perla sarà

$$\boldsymbol{v}_o = -\frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} + \omega R\boldsymbol{\tau}$$

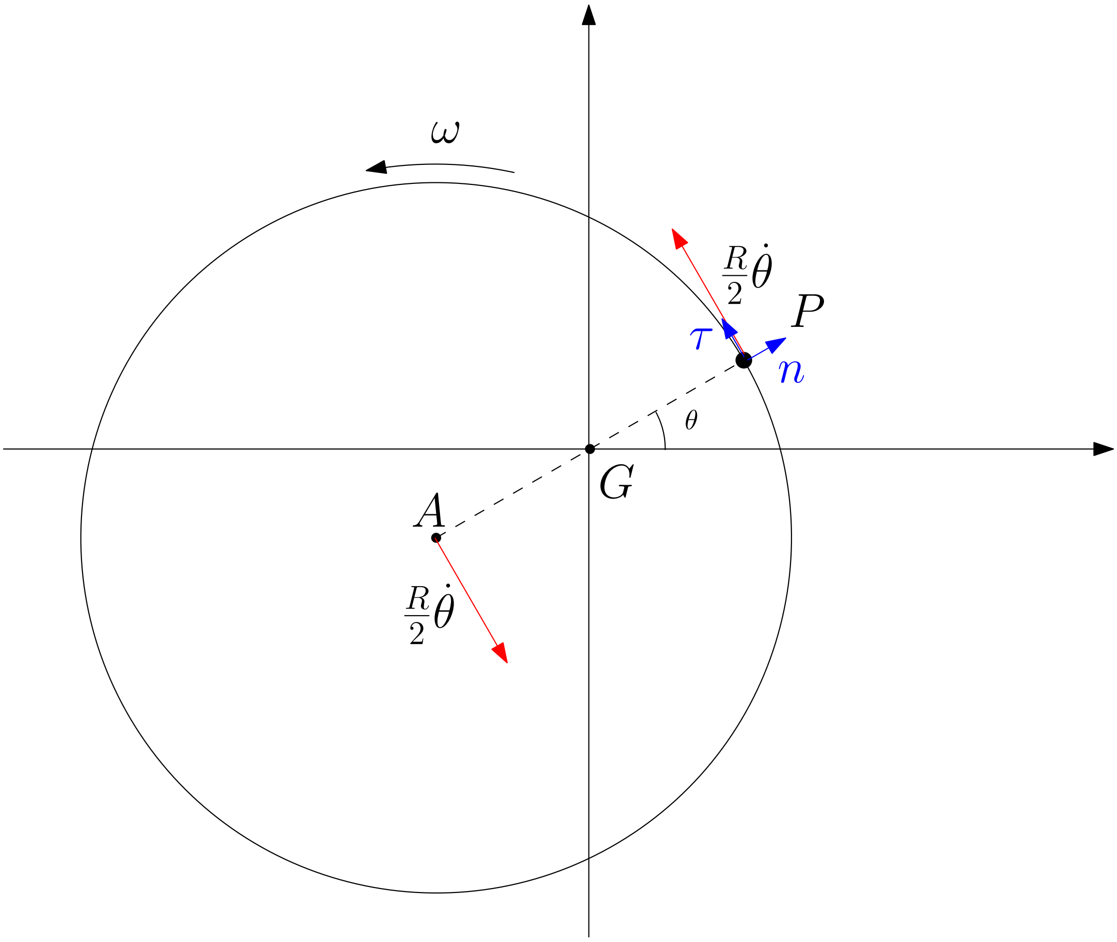

Figura 6.2.: Il sistema in rotazione.

Fino a quando la velocità relativa tra anello e perla è diversa da zero l'attrito dissiperà energia. A regime dovremo avere perciò $\boldsymbol{v}_o = \boldsymbol{v}_P$ ossia

$$\dot{\theta} = \omega$$

Il sistema sarà equivalente quindi all'unico corpo rigido considerato nella prima parte del problema, e quindi

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{J}{3mR} \\ \boldsymbol{v}_A &= -\frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} = -\frac{J}{6m}\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{v}_P &= \frac{J}{6m}\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

Alternativamente si poteva dire subito che, a regime, il sistema si muove come un unico corpo rigido. Quindi la velocità di P è data semplicemente, in qualsiasi sistema di riferimento, da

$$\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G})$$

Nel centro di massa $\boldsymbol{v}_G = 0$, e $\boldsymbol{v}_A$ segue di conseguenza.

2.e

Dato che il centro di massa dell'anello si muove di moto circolare, la forza totale su di esso lungo la direzione radiale indicata dal versore $\boldsymbol{n}$ in Figura 6.2 sarà

$$\boldsymbol{F}_N = m\frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{n}$$

Se la velocità relativa tra perla e anello è diversa da zero, avremo anche la forza di attrito dinamico

$$\boldsymbol{F}_T = \mu_d m \frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{\tau} = \mu_d m \frac{R}{2}\dot{\theta}^2\boldsymbol{\tau}$$

dove abbiamo supposto la velocità dell'anello nel punto di contatto in direzione $\boldsymbol{\tau}$ minore di quella della perla. Il rapporto richiesto è in questo caso

$$\frac{F_T}{F_N} = \mu_d$$

A regime la velocità relativa tra perla e anello è zero. Come prima

$$\boldsymbol{F}_N = m\frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{n}$$

ma dato che l'accelerazione tangenziale deve essere nulla sarà

$$\boldsymbol{F}_T = 0$$

ovviamente compatibile con la condizione

$$|\boldsymbol{F}_T| \leq \mu_s |\boldsymbol{F}_N|$$

Quindi in questo caso

$$\frac{F_T}{F_N} = 0$$

2.f

Scriviamo le equazioni del moto. Per il moto del centro dell'anello nella direzione $\boldsymbol{\tau}$ abbiamo durante il transiente

$$-m\frac{R}{2}\ddot{\theta} = \mu_d m \frac{R}{2}\dot{\theta}^2$$

e quindi

$$\ddot{\theta} = -\mu_d \dot{\theta}^2$$

Inoltre il momento angolare totale del sistema si conserva, e quindi

$$\left[m\frac{R^2}{4}\dot{\theta}\right] + \left[m\frac{R^2}{4}\dot{\theta}\right] + \left[mR^2\omega\right] = \frac{JR}{2}$$

I primi due termini sono rispettivamente il momento angolare della perla e del centro di massa dell'anello. L'ultimo è il momento angolare dell'anello rispetto al suo centro di massa. Troviamo quindi

$$\omega = \frac{J}{2mR} - \frac{1}{2}\dot{\theta} \tag{6.6.2}$$

Integriamo l'equazione del moto: ponendo $\dot{\theta} = \varpi$ abbiamo

$$\int \frac{d\varpi}{\varpi^2} = -\int \mu_d dt$$

cioè

$$\frac{1}{\varpi(t)} = \frac{1}{\varpi(0)} + \mu_d t$$

ossia, tenendo conto che $\varpi(0) = \dot{\theta}(0) = J/(mR)$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\frac{J}{mR}}{1 + \frac{J}{mR}\mu_d t}$$

e per la velocità angolare dell'anello quindi vale, usando l'Equazione (6.6.2)

$$\omega = \frac{J}{2mR}\left(\frac{\frac{J}{mR}\mu_d t}{1 + \frac{J}{mR}\mu_d t}\right)$$

Si può osservare che, al crescere di t, a causa dell'attrito la velocità angolare dell'anello $\omega(t)$ aumenta, mentre diminuisce quella del corpo $\dot{\theta}(t)$. Il transiente termina quando $\dot{\theta} = \omega$, cioè quando

$$1 = \frac{J}{2mR}\mu_d t$$

ossia

$$t = \frac{2mR}{J\mu_d}$$

Sostituendo troviamo

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{J}{3mR}$$

in accordo con quanto determinato al punto 2.d (Equazione (6.6.1)).