6.7. 21 marzo 2015

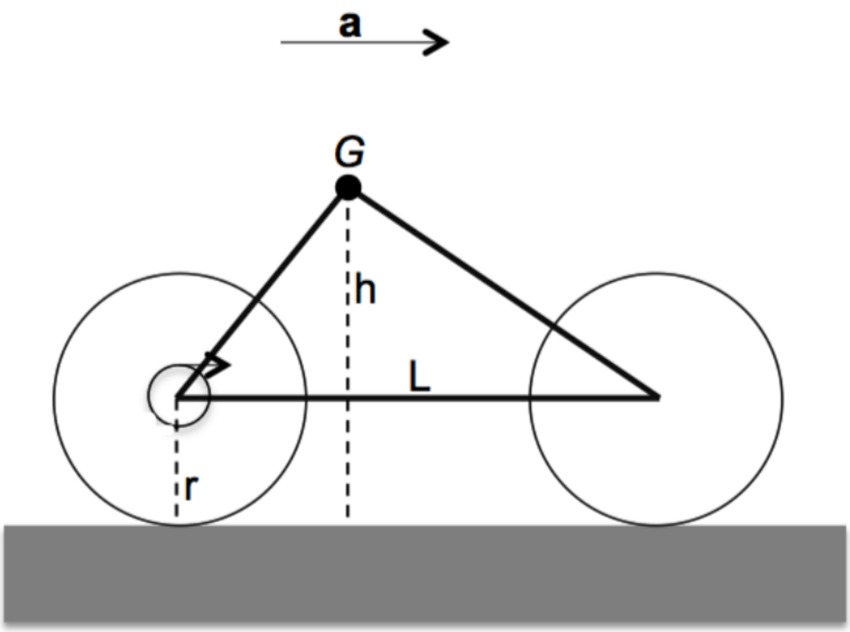

Figura 6.3.: Il modello di motocicletta considerato nel problema.

Un motociclista parte con la sua motocicletta, su una strada rettilinea e pianeggiante, con una accelerazione costante di modulo a, senza provocare impennate e senza causare slittamenti delle ruote. Si consideri il motociclista e la motocicletta, tranne le ruote, come un unico corpo rigido di massa M e centro di massa nel punto G posto ad una altezza h dal suolo. Il segmento che congiunge i centri delle due ruote è lungo L; la verticale passante per G lo divide in due parti di cui quella anteriore è doppia di quella posteriore. Le due ruote hanno ugual raggio r e massa m concentrata sul bordo.

Dati numerici: $a = 5\text{ms}^{-2}$ $(0 - 100\text{km/h in } 5.6\text{s})$, $M = 246\text{kg}$, $m = 2\text{kg}$, $h = 75\text{cm}$, $L = 130\text{cm}$, $r = 30\text{cm}$.

Determinare:

1. le forze di attrito radente che il manto stradale esercita sulle ruote;
2. il momento delle forze che il motore esercita (per mezzo della catena) sulla ruota posteriore, rispetto al centro di questa;
3. le forze normali (verticali) che il manto stradale esercita sulle ruote;
4. l'accelerazione massima consentita perché la motocicletta non si impenni;

5. quali limiti devono rispettare i coefficienti d'attrito affinché la motocicletta possa arrivare a impennarsi;

6. se le forze che trasferiscono quantità di moto e quelle che trasferiscono energia (cinetica) alla motocicletta siano interne o esterne e la potenza complessiva che esse forniscono;

7. le forze che il telaio esercita sugli assi delle ruote;

Facoltativamente si diano i valori numerici delle grandezze fisiche richieste nelle domande precedenti.

Soluzione

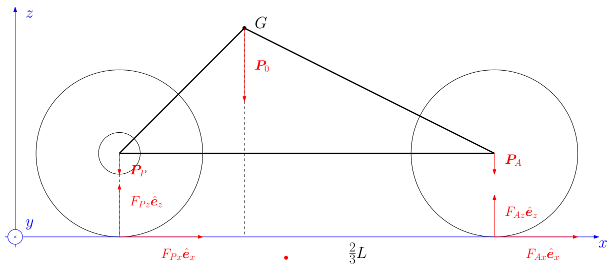

Figura 6.4.: Le forze esterne (in rosso) che agiscono sulla bicicletta.

Scegliamo come sistema di riferimento (inerziale) quello solidale alla strada e, come sistema di coordinate cartesiane, uno che abbia l'asse x orizzontale con la stessa direzione e verso del moto della motocicletta, l'asse y perpendicolare al piano della figura e verso entrante e l'asse z verticale e rivolto verso l'alto. Siano inoltre $\boldsymbol{F}_P$ e $\boldsymbol{F}_A$ le forze (esterne) esercitate dal manto stradale rispettivamente sulla ruota posteriore e su quella anteriore (Figura 6.4). Le componenti F_{Px} e F_{Ax} corrispondono alle forze di attrito, mentre le componenti F_{Pz} e F_{Az} costituiscono le forze vincolari normali.

Un'altra, e ultima, forza esterna alla motocicletta è la forza peso $\boldsymbol{P} = -(M + 2m)\, g\hat{\boldsymbol{e}}_z$ data dalla somma del peso $\boldsymbol{P}_0$ di M, e di quello $\boldsymbol{P}_A$ e $\boldsymbol{P}_P$ della ruota anteriore e posteriore.

La prima equazione cardinale della dinamica applicata all'intera motocicletta è:

$$\boldsymbol{F}_P + \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{P} = (M + 2m)\, \boldsymbol{a} \tag{6.7.1}$$

dove $\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{e}}_x$ è l'accelerazione del suo centro di massa G, coincidente con quella di G e di ciascuno dei centri delle ruote.

Nel seguito prenderemo spesso in considerazione separatamente le due ruote e il corpo rigido M di massa M costituito dal motociclista e dalla motocicletta senza le ruote.

Se le ruote non slittano, le reazioni tra le loro velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{e}}_y$ le velocità lineari $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_x$ dei loro centri sono date da

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (r\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

da cui

$$v = \omega r$$

Derivando otteniamo la relazione tra accelerazioni,

$$a = \alpha r$$

dove $a = \dot{v}$ e $\alpha = \dot{\omega}$.

Domanda 1

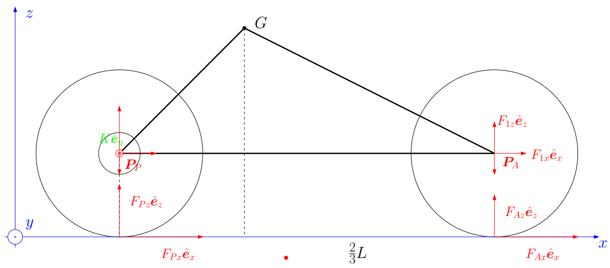

Figura 6.5.: Le forze esterne (in rosso) e i momenti esterni (in verde) che agiscono sulla ruota anteriore e posteriore.

Consideriamo le forze che agiscono sulla ruota anteriore (Figura 6.5): abbiamo la forza peso $\boldsymbol{P}_A$, la forza esercitata dall'asse $\boldsymbol{F}_1$ e la forza $\boldsymbol{F}_A$. Di queste solo l'ultima ha un momento diverso da zero rispetto al centro della ruota. Possiamo dunque scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica per la ruota anteriore:

$$I\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_y = -r\hat{\boldsymbol{e}}_z \wedge \boldsymbol{F}_A = -F_{Ax} r\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Dato che $I = mr^2$ e $\alpha = a/r$ otteniamo

$$F_{Ax} = -ma$$

Consideriamo adesso la prima equazione cardinale di tutta la bicicletta. Prendendo la componente x otteniamo

$$F_{Ax} + F_{Px} = (M + 2m)\, a$$

e quindi

$$F_{Px} = (M + 3m)\, a$$

Si noti che la forza d'attrito sulla ruota anteriore è rivolta nel verso opposto a quello dell'accelerazione (potremmo chiamarla forza resistente), mentre quella sulla ruota posteriore è rivolta nel verso dell'accelerazione (potremmo chiamarla forza motrice).

Con i dati numerici del testo:

$$F_{Ax} = -10\text{N}$$
$$F_{Px} = 1260\text{N}$$

Si noti la grande differenza numerica (due ordini di grandezza) tra i moduli delle due forze.

Domanda 2

Scriviamo ora la seconda equazione cardinale per la ruota posteriore, usando come polo il centro della ruota. Rispetto al caso della ruota anteriore, qui entra in gioco anche il momento delle forze $\boldsymbol{K} = K\hat{\boldsymbol{e}}_y$ (Figura 6.5) che esercita il motore.

Anche in questo caso la forza peso $\boldsymbol{P}_P$ e la forza $\boldsymbol{F}_2$ esercitata dall'asse non hanno momento (per la precisione l'asse esercita una serie di forze, di cui $\boldsymbol{F}_2$ è la risultante, ma il momento esercitato dall'asse è in ogni caso trascurabile se lo è l'attrito - per esempio per la presenza di cuscinetti a sfera - e quindi tutte le forze sono essenzialmente radiali).

Il momento meccanico risultante è $\boldsymbol{\tau}_2 = (K - rF_{Px})\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ e l'equazione cardinale

$$\boldsymbol{\tau}_2 = I\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Proiettando sull'asse y e risolvendo (ancora una volta $I = mr^2$ e $\alpha = a/r$) otteniamo

$$K = (M + 4m)\,ra$$

Numericamente:

$$K = 381\text{Nm}$$

Domanda 3

Applichiamo la seconda equazione cardinale alla motocicletta nel suo complesso, ruote incluse.

Calcoliamo per prima cosa il momento delle forze $\boldsymbol{\tau}$ risultante sulla motocicletta, rispetto al polo mobile G. Le forze esterne da considerare sono $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{P}_A$, $\boldsymbol{F}_P$, $\boldsymbol{P}_P$ e la forza peso $\boldsymbol{P}_0$ su M. Il momento di $\boldsymbol{P}_0$ rispetto a G è nullo. Considerando i bracci di ciascuna delle altre forza, il momento meccanico complessivo vale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \left(-hF_{Ax} - \frac{2}{3}LF_{Az} + \frac{2}{3}Lmg - hF_{Px} + \frac{1}{3}LF_{Az} - \frac{1}{3}Lmg\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ &= \left[\frac{1}{3}L\,(F_{Az} - 2F_{Pz}) - h\,(M + 2m)\,a + \frac{1}{3}Lmg\right]\hat{\boldsymbol{e}}_y\end{aligned}$$

Il momento angolare $\boldsymbol{J}$ rispetto al polo G, se la moto non si sta impennando e quindi M sta semplicemente traslando con velocità $\boldsymbol{v}$, riceve contributi (identici) solo dal moto delle due ruote:

$$\boldsymbol{J} = 2\left[mr^2\omega - (h - r)\,mv\right]\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

La seconda equazione è dunque

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{v}_G \wedge (M + 2m)\, \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{J}}$$

che proiettata sull'asse y fornisce

$$\frac{1}{3} L \left(F_{Pz} - 2F_{Az}\right) - h\,(M + 2m)\, a + \frac{1}{3} Lmg = 2\left[mr^2 \frac{a}{r} - (h - r)\, ma\right]$$

Questa equazione insieme alla proiezione nella direzione z della prima equazione cardinale (6.7.1) danno il sistema

$$\begin{aligned} F_{Pz} - 2F_{Az} &= 3M\frac{h}{L}a + 12m\frac{r}{L}a - mG \\ F_{Pz} + F_{Az} &= (M + 2m)\, g \end{aligned}$$

la cui soluzione fornisce:

$$F_{Pz} = \left(\frac{2}{3}M + m\right) g + \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a \tag{6.7.2}$$

$$F_{Az} = \left(\frac{1}{3}M + m\right) g - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a \tag{6.7.3}$$

Valori numerici:

$$\begin{aligned} F_{Pz} &= 2347\text{N} \\ F_{Az} &= 105\text{N} \end{aligned}$$

Domanda 4

Il vincolo monolaterale costituito dalla strada richiede che le equazioni scritte siano valide solo alle condizioni $F_{Pz} > 0$ e $F_{Az} > 0$. Dalle equazioni (6.7.2) e (6.7.3) segue che deve essere

$$\left(\frac{1}{3}M + m\right) g - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a > 0$$

da cui si ricava immediatamente il valore massimo a_{max} dell'accelerazione:

$$a_{max} = \frac{1}{3}\frac{L\,(M + 3m)}{hM + 4rm} g \tag{6.7.4}$$

Numericamente

$$a_{max} = 5.73\text{ms}^{-2}$$

Per $m \ll M$ la (6.7.4) può essere approssimata da

$$a_{max} \simeq \frac{1}{3}\frac{L}{h}g \tag{6.7.5}$$

che evidenzia l'importanza di mantenere basso il baricentro della motocicletta.

Una moto da corsa può raggiungere accelerazioni di $8\mathrm{ms}^{-2}$, infatti in gara spesso la ruota anteriore si solleva in fase di accelerazione dopo una curva.

Domanda 5

Nel limite $a \to a_{max}$ si ha $F_{Ax} \to -ma_{max}$ e $F_{Az} \to 0$, per cui il rapporto $|F_{Ax}/F_{Az}| \to \infty$ e, qualunque sia il coefficiente di attrito statico, la ruota anteriore perde aderenza e inizia a slittare. Per accelerazioni prossime a quella di impennata, quindi, le equazioni precedenti non sono più esatte e vale la pena considerare l'approssimazione della (6.7.5), con $m \ll M$. In questa approssimazione, dalla soluzione della prima domanda e dalle (6.7.2) e (6.7.3), si ha:

$$\begin{aligned}
F_{Ax} &\simeq 0 \\
F_{Az} &\simeq \frac{1}{3}Mg - \frac{h}{L}Ma \\
F_{Px} &\simeq Ma \\
F_{Pz} &\simeq \frac{2}{3}Mg + \frac{h}{L}Ma
\end{aligned}$$

Perché la ruota posteriore non slitti, bisogna che il coefficiente di attrito statico μ_s soddisfi alla disuguaglianza:

$$\mu_s > \frac{F_{Px}}{F_{Pz}} = \frac{a}{\frac{2}{3}g + \frac{h}{L}a} = \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{g}{a} + \frac{h}{L}} \geq \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{g}{a_{max}} + \frac{h}{L}}$$

da cui, sostituendo la (6.7.5), si ricava

$$\mu_s > \frac{1}{3}\frac{L}{h}$$

Nel nostro caso numerico: $\mu_s > 0.58$.

Domanda 6

Le forze che trasferiscono quantità di moto devono necessariamente essere esterne. La forza peso è compensata dalle forze vincolari normali alla strada; le forze responsabili dell'incremento della quantità di moto sono quelle di attrito e, in particolare, quella agente sulla ruota posteriore F_{Px}; infatti F_{Ax} ha un modulo assai minore di F_{Px} e comunque tende a diminuire la quantità di moto.

Le forze esterne non fanno lavoro: infatti sia $\boldsymbol{F}_P$ che $\boldsymbol{F}_A$ sono applicate a punti istantaneamente in quiete, e le forze peso sono applicate a punti che si muovono orizzontalmente. Le forze che fanno lavoro sono quindi interne: si tratta delle forze applicate dal motore.

La potenza complessiva W si ottiene dalla derivata temporale dell'energia cinetica E_c:

$$\begin{aligned} W = \dot{E}_c &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(M+2m)v^2 + 2\frac{1}{2}I\omega^2\right] \\ &= (M+2m)va + 2mr^2\frac{v}{r^2}a \\ &= (M+4m)va \end{aligned}$$

da cui si può ricavare l'andamento temporale della potenza sviluppata dal motore nel tempo:

$$W(t) = (M+4m)a^2 t = \dot{W}t$$

La potenza deve crescere linearmente nel tempo. Poiché la potenza massima del motore è limitata, essa determina un limite temporale al mantenimento di un'accelerazione costante, anche senza prendere in considerazione le altre limitazioni tecniche.

Nel nostro caso, il coefficiente con cui cresce la potenza vale: $\dot{W} = 6350\mathrm{Ws}^{-1}$

Si noti che le potenze massime W_{max} di moto GP possono raggiungere i 150kW. Nel nostro caso questa potenza massima corrisponderebbe a un tempo massimo di accelerazione costante $t_{max} = W_{max}/\dot{W} \simeq 24s$ e a una velocità massima $v_{max} = at_{max} \simeq 118\mathrm{ms}^{-1} \simeq 425\mathrm{km/h}$. Inoltre, in questo modello semplicistico, la velocità massima può addirittura crescere senza limiti al decrescere dell'accelerazione a, cosa ovviamente del tutto irrealistica!

I valori reali sono minori dei precedenti: le velocità massime si aggirano sui 360km/he, generalmente, le curve di accelerazione mostrano che l'accelerazione diminuisce con continuità al crescere della velocità.

Sorprendentemente, se usiamo il valore $a = a_{max} = 5.73\mathrm{ms}^{-2}$ trovato nella risposta alla domanda 4, otteniamo $t_{max} = 18\mathrm{s}$ e $v_{max} = 370\mathrm{km/h}$, che sono valori piuttosto vicini alla realtà.

Domanda 7

Trascurando le masse degli assi, le forze che il telaio esercita sugli assi sono uguali alle forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ esercitate dagli assi sulle ruote. Per quanto riguarda la ruota anteriore, la prima equazione cardinale applicata alla ruota fornisce

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{F}_A = m\boldsymbol{a}$$

da cui

$$\boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_A$$

proiettando questa equazione sugli assi x e z e sostituendo i valori già calcolati delle altre quantità:

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= 2ma \\
F_{1z} &= -\frac{1}{3}Mg + \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la ruota posteriore, considerando che $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ sono opposte alle rispettive forze che gli assi esercitano sul telaio (terza legge di Newton), la prima equazione cardinale applicata a M fornisce:

$$-\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{F}_1 = M\boldsymbol{a}$$

da cui

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{F}_1 - M\boldsymbol{a}$$

proiettando questa equazione sugli assi x e z e sostituendo i valori già calcolati delle altre quantità otteniamo

$$\begin{aligned}
F_{2x} &= -Ma - 2ma \\
F_{2z} &= -\frac{2}{3}Mg - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a
\end{aligned}$$

Numericamente

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= 20\text{N} \\
F_{1z} &= -85.3\text{N} \\
F_{2x} &= -1250\text{N} \\
F_{2z} &= -2327\text{N}
\end{aligned}$$