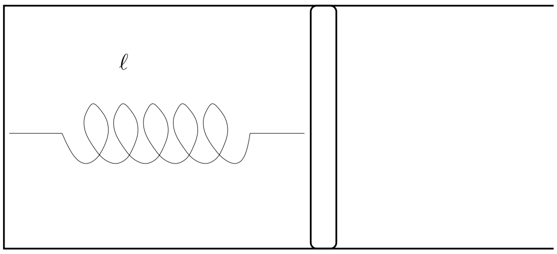
7.1. 28 maggio 2008

Problema 1 (15 punti)



Nel cilindro di sezione S in figura sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, e la molla che collega il setto mobile al fondo ha lunghezza a riposo nulla ed esercita una forza di richiamo di modulo

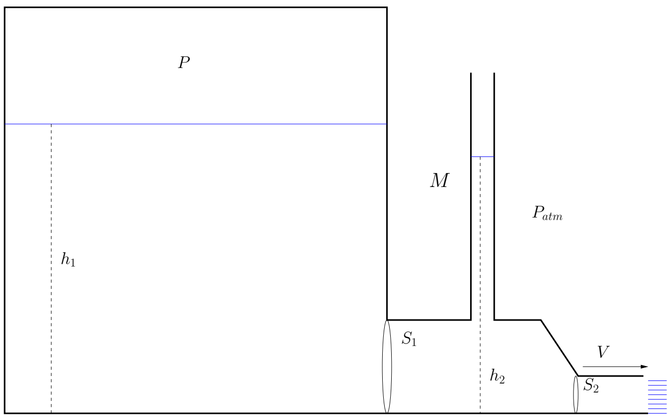
$$F = k\ell^{\alpha} \tag{7.1.1}$$

dove ℓ è l'allungamento. Inizialmente il sistema è all'equilibrio, ad una temperatura T_0, e all'esterno del cilindro c'è il vuoto.

1. Determinare la legge che lega la pressione del gas al suo volume.
2. Si fornisce al sistema una quantità di calore dQ. Determinare la capacità termica.
3. Calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_B < T_0$.

Problema 2 (15 punti)

Un recipiente cilindrico di sezione S è riempito fino ad una altezza h_1 di acqua, per la parte rimanente di vapore saturo. Sul fondo è praticato un foro di sezione $S_1 \ll S$, collegato ad una conduttura che nel tratto finale riduce la sua sezione a $S_2 < S_1$. Fornendo calore al sistema si mantiene la pressione del vapore ad un valore P. Nella conduttura si innesta un cilindro verticale aperto M, come in figura. I diametri della conduttura sono tutti di dimensioni trascurabili rispetto ad h_1.



1. Che altezza h_2 raggiunge l'acqua nel cilindro M se l'apertura di sezione S_2 è mantenuta chiusa?

2. Si apre adesso la conduttura, e in breve tempo si raggiunge lo stato stazionario. Calcolare la nuova altezza h_2 del liquido in M e la velocità con la quale l'acqua esce dalla conduttura.

3. Detta V la velocità calcolata al punto precedente, dire quanto calore è necessario fornire al sistema per unità di tempo per mantenere le condizioni stazionarie. Indicare con λ il calore latente di evaporazione e con ρ_V la densità del vapore.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La pressione del gas deve equilibrare la forza che la molla applica al pistone, quindi

$$P = \frac{F}{S} = \frac{k\ell^\alpha}{S} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \,. \tag{7.1.2}$$

Domanda 2

Abbiamo

$$\begin{aligned} dQ &= dU = nc_V dT + k\ell^\alpha d\ell & (7.1.3) \\ &= nc_V dT + \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha dV & (7.1.4) \end{aligned}$$

d'altra parte

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \tag{7.1.5}$$

cioè

$$V = S \left(\frac{nRT}{k} \right)^{1/(1+\alpha)} \tag{7.1.6}$$

e

$$dV = \frac{nRS}{k(1+\alpha)} \left(\frac{nRT}{k} \right)^{-\alpha/(1+\alpha)} dT \,. \tag{7.1.7}$$

Sostituendo otteniamo

$$dQ = CdT = \left[nc_V + \frac{k}{S^{1+\alpha}} S^\alpha \left(\frac{nRT}{k} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} \frac{nRS}{k(1+\alpha)} \left(\frac{nRT}{k} \right)^{-\alpha/(1+\alpha)} \right] dT \tag{7.1.8}$$

quindi

$$C = nc_V + n\frac{R}{(1+\alpha)} \,. \tag{7.1.9}$$

Domanda 3

Ponendo uguale a zero la variazione di entropia del sistema abbiamo

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_B} + nc_v \log\frac{T_B}{T_0} + nR\log\left(\frac{T_B}{T_0}\right)^{1/(1+\alpha)} = 0 \tag{7.1.10}$$

da cui

$$Q_2 = nT_B\left(c_v + \frac{R}{1+\alpha}\right)\log\frac{T_0}{T_B}\,. \tag{7.1.11}$$

D'altra parte

$$Q_1 = -\int_{T_0}^{T_B} C dT = n\left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right)(T_0 - T_B) \tag{7.1.12}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_2 = n\left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right)\left[(T_0 - T_B) - T_B\log\frac{T_0}{T_B}\right]\,. \tag{7.1.13}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che la pressione sul fondo è la stessa ovunque deve essere

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 \tag{7.1.14}$$

e quindi

$$h_2 = h_1 + \frac{P - P_{atm}}{\rho g}\,. \tag{7.1.15}$$

Domanda 2

Detta V_1 la velocità nel tratto di sezione S_1 dal teorema di Bernoulli segue che

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + pa\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{7.1.16}$$

e dalla conservazione della massa

$$S_1 V_1 = S_2 V\,. \tag{7.1.17}$$

Risolvendo abbiamo

$$V = \sqrt{\frac{2\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)}{\rho}} \tag{7.1.18}$$

e

$$h_2 = \frac{\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{\rho g S_1^2}\,. \tag{7.1.19}$$

Domanda 3

Dato che la sezione S è molto grande possiamo considerare h_1 costante. Man mano che il liquido defluisce è necessario rimpiazzarlo con nuovo vapore saturo, per mantenere costante la pressione P. La massa di vapore da creare per unità di tempo è

$$\rho_V V S_2 \tag{7.1.20}$$

che corrisponde alla massa di liquido da far evaporare. Quindi

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \rho_V V S_2\,. \tag{7.1.21}$$