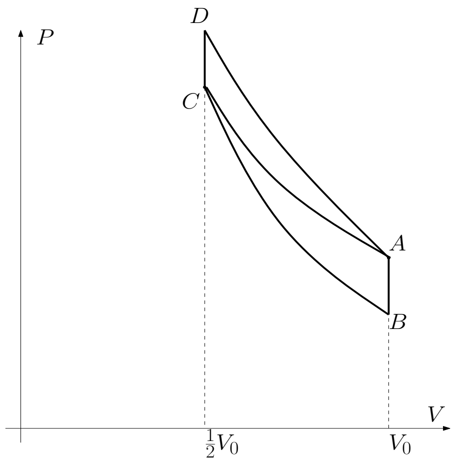
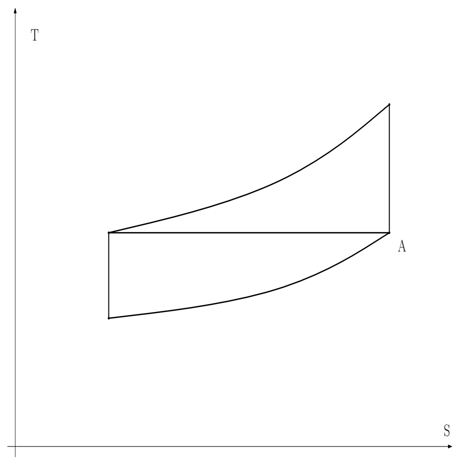
7.5. 28 maggio 2012

Problema 1 (15 punti)





Considerare le due diverse trasformazioni cicliche effettuate su una mole di gas perfetto monoatomico rappresentate nella figura a sinistra, $A \to B \to C \to A$ e $A \to C \to D \to A$.

Le trasformazioni $A \to B$ e $C \to D$ sono isocore che avvengono ai volumi V_0 e $V_0/2$ rispettivamente.

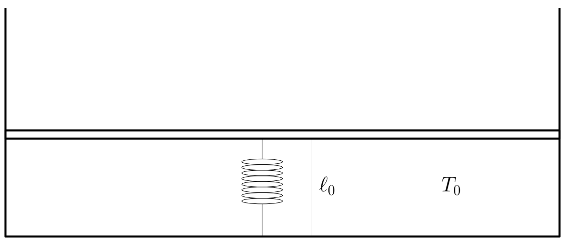
Le $B \to C$ e $D \to A$ sono adiabatiche e $C \to A$ è un'isoterma alla temperatura T_0.

1. Le stesse trasformazioni sono rappresentare nel piano $T - S$ nella figura a destra. Completate il diagramma indicando chiaramente la posizione degli stati B, C e D motivando la risposta. Inoltre determinate la forma analitica delle curve $C - D$ e $B - A$.

2. Calcolare i rendimenti dei due cicli.

3. Mostrare che per il rendimento η del ciclo $ABCDA$ vale $\eta = \eta_{ABCA} + \eta_{ACDA} - \eta_{ACDA}\eta_{ABCA}$. Si suggerisce di considerare i calori assorbiti e ceduti per ogni ciclo.

Problema 2 (15 punti)



Un recipiente cilindrico è chiuso da un pistone scorrevole di sezione S, e contiene una mole di un gas perfetto inizialmente alla temperatura T_0. Recipiente e pistone sono impermeabili al calore. Il pistone è privo di massa ed è collegato al fondo del recipiente da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Il pistone è inizialmente bloccato in modo che la lunghezza della molla sia ℓ_0.

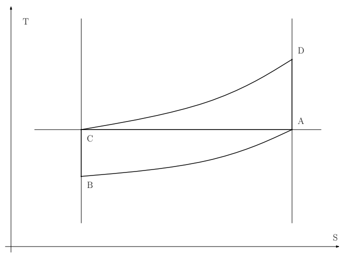
1. Si rimuove il blocco, lasciando il pistone libero di muoversi. Determinare la temperatura del gas quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.

2. Calcolare la variazione di entropia del sistema, ΔS.

3. Trovare, se esiste, un valore di ℓ_0 per il quale ΔS si annulla e interpretare il risultato. Suggerimento: cercate il minimo di ΔS al variare di ℓ_0, e giustificate il risultato trovato a posteriori.

Soluzione primo problema

Domanda 1



Gli stati sono indicati in figura. Per costruire il diagramma si è usato il fatto che in una isocora ($C-D$ e $B-A$) la temperatura dipende esponenzialmente dall'entropia, infatti

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_V \frac{dT}{T}$$

e quindi

$$T = K \exp\left(\frac{S}{c_V}\right)$$

Inoltre su un'isoterma l'entropia è una funzione crescente del volume, dato che

$$dS = \frac{PdV}{T} = nR\frac{dV}{V}$$

quindi A si trova a destra di C.

Domanda 2

L'efficienza per il ciclo $ACDA$ è data da

$$\eta_{ACDA} = \frac{Q_{CD} - Q_{iso}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{Q_{iso}}{Q_{CD}}$$

dove Q_{iso} è il calore assorbito sull'isoterma CA e Q_{CD} quello assorbito sull'isocora CD. Quindi

$$\eta_{ACDA} = 1 - \frac{Q_{iso}}{Q_{CD}}$$

Invece per il ciclo $ABCA$ abbiamo

$$\eta_{ABCA} = \frac{Q_{iso} - Q_{BA}}{Q_{iso}} = 1 - \frac{Q_{BA}}{Q_{iso}}$$

dove Q_{BA} è il calore assorbito sull'isocora BA.

Abbiamo

$$\begin{aligned} Q_{iso} &= L_{iso} = RT_0 \log 2 \\ Q_{BA} &= c_V (T_0 - T_B) \\ Q_{CD} &= c_V (T_D - T_0) \end{aligned}$$

ma dato che B e C sono collegati da un'adiabatica

$$T_D \left(\frac{1}{2} V_0\right)^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$

da cui

$$T_D = T_0 2^{\gamma-1}$$

Analogamente

$$T_B V_0^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{1}{2} V_0\right)^{\gamma-1}$$

e quindi

$$T_B = T_0 \frac{1}{2^{\gamma-1}}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \eta_{ACDA} &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{\log 2}{(2^{\gamma-1} - 1)} \\ &= 1 - \frac{\gamma - 1}{2^{\gamma-1} - 1} \log 2 \simeq 0.213 \\ \eta_{ABCA} &= 1 - \frac{c_V}{R} \frac{\left(2^{\gamma-1} - 1\right)}{2^{\gamma-1} \log 2} \\ &= 1 - \frac{1 - 2^{1-\gamma}}{\gamma - 1} \frac{1}{\log 2} \simeq 0.199 \end{aligned}$$

Domanda 3

Il rendimento del ciclo $ABCDA$ si scrive

$$\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}}$$

ma dato che come visto in precedenza

$$Q_{iso}\left(\eta_{ABCA} - 1\right) = Q_{AB}$$

$$Q_{CD} = \frac{Q_{iso}}{1 - \eta_{ACDA}}$$

abbiamo

$$\eta = \eta_{ABCA} + \eta_{ACDA} - \eta_{ACDA}\eta_{ABCA}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Se la lunghezza della molla nello stato di equilibrio è ℓ_f, la sua energia potenziale sarà variata di

$$\Delta U_{molla} = \frac{k}{2}\left(\ell_f^2 - \ell_0^2\right)$$

e quella del gas di

$$\Delta U_{gas} = c_V\left(T_f - T_0\right)$$

Dato che non è stato ceduto calore al sistema e non è stato fatto lavoro su di esso $\Delta U_{molla} + \Delta U_{gas} = 0$, quindi

$$\frac{k}{2}\left(\ell_f^2 - \ell_0^2\right) + c_V\left(T_f - T_0\right) = 0$$

inoltre, imponendo l'equilibrio meccanico del pistone nella posizione finale, abbiamo

$$RT_f = P_f V_f = \left(\frac{k\ell_f}{S}\right)\left(S\ell_f\right) = k\ell_f^2$$

da cui

$$\frac{k}{2}\left(\frac{R}{k}T_f - \ell_0^2\right) + c_V\left(T_f - T_0\right) = 0$$

e quindi

$$T_f = \frac{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2}{c_V + \frac{1}{2}R}T_0$$

Domanda 2

Confrontando le entropie del gas nei due stati abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= c_V \log \frac{T_f}{T_0} + R \log \frac{V_f}{V_0} \\
&= c_V \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{1}{2} R \log \frac{\ell_f^2}{\ell_0^2} \\
&= \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{1}{2} R \log \frac{RT_0}{k\ell_0^2} \\
&= \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \log \frac{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2}{c_V + \frac{1}{2}R} + \frac{1}{2} R \log \frac{nRT_0}{k\ell_0^2}
\end{aligned}$$

Domanda 3

Dato che deve essere $\Delta S \geq 0$ minimizziamo l'espressione determinata precedentemente rispetto a ℓ_0^2. Abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial \ell_0^2} \Delta S = \left(c_V + \frac{1}{2} R \right) \frac{\frac{k}{2T_0}}{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2} - \frac{R}{2} \frac{1}{\ell_0^2}$$

che si annulla per

$$k\ell_0^2 = RT_0$$

Sostituendo in ΔS troviamo che in questo caso $\Delta S = 0$. Il risultato poteva essere anticipato, osservando che per questo valore di ℓ_0 il sistema è in equilibrio meccanico anche inizialmente, per cui rimuovendo il blocco non si ha nessun cambiamento dello stato del gas.