7.7. 9 Maggio 2014

Un recipiente di volume V_0, con pareti termicamente isolanti, è diviso in due parti A e B (siano indicati con V_A e V_B i rispettivi volumi) da un pistone perfettamente scorrevole e di capacità termica trascurabili, anch'esso adiabatico.

In A sono contenute n_A moli di un gas ideale biatomico alla temperatura iniziali T_{Ai}; in B sono contenute n_B moli dello stesso gas a temperatura iniziale T_B (sia $T_{Ai} > T_{Bi}$).

Inizialmente il sistema è in equilibrio termodinamico.

Successivamente nel pistone si verifica una perdita di isolamento termico e calore inizia a fluire da A a B, finché il sistema raggiunge di nuovo l'equilibrio termodinamico.

Calcolare:

1. I volumi iniziale V_{Ai} e V_{Bi};
2. La temperatura finale T_f;
3. I volumi finali V_{Af} e V_{Bf};
4. La variazione complessiva dell'entropia dell'universo;

Si supponga ora che la falla dell'isolamento termico sia molto piccola, per cui si può considerare che, istante per istante, durante la trasformazione sussista l'equilibrio meccanico e, per ciascuno scompartimento considerato separatamente dall'altro, l'equilibrio termico.

5. Calcolare le pressioni dei gas durante la trasformazione in funzione della temperatura T_B del secondo scomparto;
6. Determinare $c = dQ/dT_B$ dove Q è il calore assorbito dal secondo comparto in funzione di T_B;
7. (*facoltativo*) Quanto lavoro si potrebbe complessivamente estrarre dal sistema (con pistone isolante), supponendo di avere a disposizione macchine cicliche che possono essere messe in contatto termico con i comparti, senza ricorrere a sorgenti termiche esterne? (per semplicità supporre in questo caso $n_A = n_B$).

Soluzione

Prima domanda

Sappiamo che le pressioni dei due scomparti sono le stesse, e che il volume totale è V_0. Possiamo scrivere quindi le due equazioni

$$\frac{n_A R T_A}{V_A} = \frac{n_B R T_B}{V_B}$$
$$V_A + V_B = V_0$$

Risolvendo il sistema e ponendo i parametri al loro valore iniziale otteniamo

$$
\begin{aligned}
V_{Ai} &= \frac{n_A T_{Ai}}{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}} V_0 \\
V_{Bi} &= \frac{n_B T_{Bi}}{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}} V_0
\end{aligned}
$$

Seconda domanda

Dato che il sistema complessivo è isolato, la sia energia si conserva. Quindi

$$n_A c_v T_{Ai} + n_B c_V T_{Bi} = n_A c_V T_f + n_B c_V T_f$$

da cui

$$T_f = \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{n_A + n_B}$$

Terza domanda

L'espressione per i volumi ottenuta nel primo esercizio è valida anche nello stato finale. Sostituendo le temperature finali abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
V_{Af} &= \frac{n_A}{n_A + n_B} V_0 \\
V_{Bf} &= \frac{n_B}{n_A + n_B} V_0
\end{aligned}
$$

Quarta domanda

Si può direttamente valutare la variazione dell'entropia sommando i contributi dei due gas:

$$\Delta S = n_A c_v \log \frac{T_f}{T_{Ai}} + n_A R \log \frac{V_{Ai}}{V_{Af}} + n_B c_v \log \frac{T_f}{T_{Bi}} + n_B R \log \frac{V_{Bi}}{V_{Bf}}$$

e sostituendo i valori ottenuti precedentemente abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= n_A c_v \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Ai} (n_A + n_B)} + n_A R \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{(n_A + n_B) T_{Ai}} \\
&+ n_B c_v \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Bi} (n_A + n_B)} + n_B R \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{(n_A + n_B) T_{Bi}} \\
&= n_A c_P \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Ai} (n_A + n_B)} + n_B c_p \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Bi} (n_A + n_B)}
\end{aligned}
$$

Quinta domanda

Dato che le pressioni dei due scomparti sono sempre le stesse possiamo scrivere

$$PV_A = n_A R T_A$$
$$PV_B = n_B R T_B$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$PV_0 = n_A R T_A + n_B R T_B = \frac{R}{c_v} U$$

dove U è l'energia interna. Dato che quest'ultima è costante, lo è anche la pressione, ed avremo

$$P = \frac{n_A R T_{Ai} + n_B R T_{Bi}}{V_0}$$

Sesta domanda

Dato che la pressione nel secondo scomparto è costante, dovrà essere

$$c = \frac{dQ}{dT_B} = n_B c_P$$

Settima domanda

Detti dQ_A e dQ_B i calori ceduti ai due scomparti in una trasformazione ciclica infinitesima avremo (poniamo $n = n_A = n_B$)

$$W = -Q_A - Q_B$$

D'altra parte

$$dQ_A + dQ_B = dU_A + dU_B$$

e quindi

$$Q_A + Q_B = \Delta U = n c_v \left(2T_f - T_{Ai} - T_{Bi}\right)$$

e quindi

$$W = n c_V \left(T_{Ai} + T_{Bi} - 2T_f\right)$$

Resta da calcolare la temperatura finale. La variazione di entropia del sistema sarà

$$\Delta S = n c_V \log \frac{T_f}{T_{Ai}} + nR \log \frac{V_{Af}}{V_{Ai}} + n c_V \log \frac{T_f}{T_{Bi}} + nR \log \frac{V_{Bf}}{V_{Bi}}$$

ossia

$$\frac{(T_{Ai} + T_{Bi})^2}{4 T_{Ai} T_{Bi}}$$

$$\begin{aligned}\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_{Ai}T_{Bi}} + nR \log \frac{V_{Af}V_{Bf}}{V_{Ai}V_{Bi}} \\ &= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_{Ai}T_{Bi}} + nR \log \frac{(T_{Ai}+T_{Bi})^2}{4T_{Ai}T_{Bi}}\end{aligned}$$

Per estrarre la massima quantità di lavoro si deve cercare di rendere T_f più piccola possibile, e dall'equazione precedente si vede che questo significa prendere il minimo di ΔS, cioè $\Delta S = 0$. Segue che

$$T_f = \sqrt{T_{Ai}T_{Bi}} \left(\frac{2\sqrt{T_{Ai}T_{Bi}}}{T_{Ai}+T_{Bi}} \right)^{\frac{R}{c_V}}$$

e quindi

$$W = 2nc_V \left[\frac{T_{Ai}+T_{Bi}}{2} - (T_{Ai}T_{Bi})^{\gamma/2} \left(\frac{2}{T_{Ai}+T_{Bi}} \right)^{\gamma-1} \right]$$