8.5. 20 febbraio 2015

1. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione in un campo di forza conservativo con energia potenziale data da:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_1(x+a)^2 & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}k_2(x-a)^2 & x > a \end{cases}$$

dove x è l'ascissa del punto, mentre k_1, k_2 e a sono costanti positive note. Detta E l'energia meccanica totale del punto materiale, determinare il periodo T di oscillazione nel limite $E \to +\infty$.

a) $T = +\infty$
b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sqrt{k_1 k_2}}}$
c) $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$
d) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
e) $T = 0$
f) $T = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

2. Rispondere alla stessa domanda del problema precedente (1), nel limite $E \to 0$.

a) $T = +\infty$
b) $T = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$
c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sqrt{k_1 k_2}}}$
d) $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$
e) $T = 0$
f) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

3. Un punto materiale di massa $m = 20.2$ g si muove in una dimensione in un campo di forza conservativo con energia potenziale data da

$$U(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

dove x è l'ascissa del punto, $a = 0.760$ J/m^3, $b = 0.936$ J/m^2 e $c = 0.746$ J. Determinare la posizione di equilibrio stabile di ascissa minima x_{eq}.

a) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta

b) $x_{eq} = -\frac{b}{a}$

c) $x_{eq} = c$

d) $x_{eq} = 0$

e) $x_{eq} = -\frac{2b}{3a}$

f) $x_{eq} = \frac{2b}{3a}$

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

4. Nel caso del problema precedente (3), determinare la frequenza, in hertz, delle piccole oscillazioni intorno alla posizione $x = x_{eq}$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.53}$ C $\boxed{3.33}$ D $\boxed{5.13}$ E $\boxed{6.93}$ F $\boxed{8.73}$

5. Sempre per il sistema descritto nel problema (3), se la particella si trova inizialmente nel punto di equilibrio stabile, determinare per quale valore minimo del modulo della velocità iniziale, in m/s, il moto non è periodico.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.76}$ C $\boxed{4.56}$ D $\boxed{6.36}$ E $\boxed{8.16}$ F $\boxed{9.96}$

6. Tarzan vuole lanciarsi attaccato a una liana di lunghezza $\ell = 6.37$ m, partendo da una posizione nella quale la liana è orizzontale, per eseguire una oscillazione completa (si trascurino gli attriti). Quale deve essere la minima tensione di rottura della liana, in newton, per permettere a Tarzan, che ha una massa di 67.2 kg, di tornare a destinazione senza incidenti?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.98 \times 10^3}$ C $\boxed{3.78 \times 10^3}$ D $\boxed{5.58 \times 10^3}$ E $\boxed{7.38 \times 10^3}$ F $\boxed{9.18 \times 10^3}$

7. Come cambia la risposta al problema precedente (6) se sulla verticale del punto al quale la liana è fissata, al di sotto di esso di $\ell/3$, si trova un ramo orizzontale attorno al quale la liana si può avvolgere?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.64 \times 10^3}$ C $\boxed{4.44 \times 10^3}$ D $\boxed{6.25 \times 10^3}$ E $\boxed{8.04 \times 10^3}$ F $\boxed{9.84 \times 10^3}$

8. Una massa $m_1 = 189$ g è collegata, tramite una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica 0.837 N/m, a un punto di sospensione che si trova sopra di essa. Una seconda molla, di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica 0.462 N/m, è fissata a m_1 e, all'altra estremità più in basso, a una seconda massa m_2. È presente un debolissimo attrito che permette al sistema di arrivare a un regime stazionario, ma che può essere, per il resto, trascurato. Mediante una opportuna forza applicata in direzione verticale a m_2, si mantiene tale massa in moto armonico verticale secondo la legge $y_2 = A\cos(\omega t)$, dove y_2 è la quota della massa m_2 e $A = 10.0$ cm. Trovare per quale frequenza, in hertz, la massa m_1 oscilla a regime in opposizione di fase a y_2 e con uguale ampiezza di 10.0 cm.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.126}$ C $\boxed{0.306}$ D $\boxed{0.486}$ E $\boxed{0.666}$ F $\boxed{0.846}$

9. Nella situazione del problema precedente (8), per ottenere il risultato voluto è necessario applicare una forza con componente verticale, positiva se verso l'alto, della forma $F_y = F_A \cos(\omega t) + F_B \sin(\omega t) + F_C$, dove F_A, F_B e F_C sono costanti. Determinare $F_A + F_B$, in newton, nel caso $m_2 = 0$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.0204}$ C $\boxed{0.0384}$ D $\boxed{0.0564}$ E $\boxed{0.0744}$ F $\boxed{0.0924}$

10. Rispondere alla domanda del problema precedente (9), nel caso $m_2 = m_1$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-0.0117}$ C $\boxed{-0.0297}$ D $\boxed{-0.0477}$ E $\boxed{-0.0657}$ F $\boxed{-0.0837}$

Soluzione

Domanda 1

La forza a cui è sottoposto il punto materiale si ottiene derivando il potenziale, e vale

$$F(x) = \begin{cases} -k_1 (x+a) & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ -k_2(x-a) & x > a \end{cases}$$

Quindi il punto materiale si muove a velocità costante per $-a < x < a$, compie mezzo periodo di oscillazione armonica attorno a $x = a$ per $x > a$ e mezzo periodo di oscillazione armonica per $x < -a$. La velocità costante nel tratto intermedio è legato all'energia dalla relazione

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

di conseguenza il tempo necessario per una oscillazione completa sarà

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Abbiamo

$$\lim_{E\to\infty} \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}} = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$$

(il tempo speso nel tratto intermedio diviene trascurabile, dato che la velocità diviene molto grande). La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

In questo caso

$$\lim_{E\to\infty} \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

dato che il tempo speso nell'attraversare il tratto intermedio diviene molto grande (la velocità diviene sempre più piccola). La risposta corretta è quindi la A.

Domanda 3

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda del potenziale

$$\frac{dU}{dx} = 3ax^2 + 2bx$$
$$\frac{d^2U}{dx^2} = 6ax + 2b$$

Dalla derivata prima vediamo che il potenziale ha due punti stazionari, $x = 0$ e $x = -2b/(3a)$. Per $x = 0$ la derivata seconda vale

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = 2b > 0$$

e quindi il potenziale ha un minimo. Per $x = -2b/(3a)$ invece

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=-\frac{2}{3}\frac{b}{a}} = -2b$$

e quindi il potenziale ha un massimo. Di conseguenza abbiamo un'unica posizione di equilibrio stabile $x_{eq} = 0$, e la risposta corretta è la D.

Domanda 4

L'equazione del moto per il punto materiale è

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -3ax^2 - 2bx$$

Per piccole oscillazioni attorno a $x_{eq} = 0$ possiamo trascurare il termine proporzionale a x^2, ed otteniamo un oscillatore armonico

$$m\ddot{x} + 2bx = 0$$

con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2b}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \times 0.936\text{Jm}^{-2}}{0.0202\text{kg}}} = 1.53214\text{Hz}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 5

Per non rimanere all'interno della buca di potenziale nella quale si trova il punto materiale deve riuscire a superare il massimo del potenziale in $x = -2b/(3a)$. Per tale valore

$$U\left(-\frac{2b}{3a}\right) = a\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)^3 + b\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)^2 + c$$
$$=$$

mentre nella posizione iniziale

$$U(0) = c$$

Dalla conservazione dell'energia vediamo che deve essere

$$\frac{1}{2}mv^2 + c > \frac{4}{27}\frac{b^3}{a^2} + c$$

e quindi

$$v > \sqrt{\frac{8}{27}\frac{b^3}{ma^2}} = \sqrt{\frac{8}{27}\frac{(0.936\text{Jm}^{-2})^3}{(0.0202\text{kg})\,(0.760\text{J}m^{-3})^2}} = 4.56339\text{ms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la C.

Domanda 6

Indichiamo con θ l'angolo tra la liana e la direzione verticale. L'equazione cardinale per Tarzan nella direzione parallela alla liana vale

$$-m\frac{v^2}{\ell} = -T + mg$$

dove T è la tensione del filo. Di conseguenza

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo inoltre

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = 0$$

da cui

$$\frac{v^2}{\ell} = 2g\cos\theta$$

e sostituendo nell'espressione per la tensione troviamo

$$T = mg + 2mg\cos\theta$$

Il valore massimo che la liana deve essere in grado si sostenere si ha per $\theta = 0$, e quindi $T_{max} = 3mg = 3 \times 67.2\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} = 1.98 \times 10^3\text{N}$. La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 7

Quando la liana tocca il ramo la velocità di Tarzan non cambia (l'energia si conserva) ma cambia il raggio di curvatura della sua traiettoria. Quindi l'equazione per la tensione nella posizione verticale diviene

$$T = mg + \frac{3}{2}m\frac{v^2}{\ell} = 4mg = 2.64 \times 10^3\text{N}$$

La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 8

L'equazione del moto per la massa m_1 è data da

$$m_1\ddot{y}_1 = -k_1\left(y_1 - y_0\right) - k_2\left(y_1 - y_2\right) - m_1 g$$

dove $y_2 = A\cos\omega t$. Abbiamo indicato con k_1 e k_2 le costanti elastiche rispettivamente della molla che collega m_1 al punto di sospensione ed all'altra massa, e con y_0 la quota del punto di sospensione.

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(y_1 - y_{1,eq}\right) + \left(k_1 + k_2\right)\left(y_1 - y_{1,eq}\right) = k_2 A\cos\omega t$$

Quindi la massa m_1 compie delle oscillazioni forzate attorno alla posizione di equilibrio

$$y_{1,eq} = -\frac{m_1 g - k_1 y_0}{k_1 + k_2}$$

La soluzione a regime sarà

$$\left(y_1 - y_{1,eq}\right) = \frac{k_2 A\cos\omega t}{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}$$

che sarà una oscillazione con la stessa ampiezza della forzante e in opposizione di fase se

$$\frac{k_2}{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2} = -1$$

cioè quando (ricordando che $\omega = 2\pi f$)

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.837\text{Nm}^{-1} + 2 \times 0.462\text{Nm}^{-1}}{0.189\text{kg}}} \\ &= 0.485813\text{Hz} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 9

La forza da applicare all'estremo della molla di costante elastica k_2 deve essere proporzionale al suo allungamento, quindi

$$k_2 (y_2 - y_1) = F_A \cos \omega t + F_B \sin \omega t + F_C$$

La posizione di equillibrio si può riassorbire scegliendo opportunamente F_C, e per la parte oscillante abbiamo

$$2k_2 A \cos \omega t = F_A \cos \omega t + F_B \sin \omega t + F_C$$

di conseguenza $F_B = 0$ e $F_A = 2k_2 A = 2 \times 0.462 \mathrm{Nm}^{-1} \times 0.1\mathrm{m} = 0.0924\mathrm{N}$. La risposta corretta è quindi la F.

Domanda 10

In questo caso deve valere

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) = F_A \cos \omega t + F_B \sin \omega t + F_C$$

cioè, riassorbento nuovamente la posizione di equilibrio in F_C

$$-A\omega^2 m_2 \cos \omega t + 2k_2 A \cos \omega t = F_A \cos \omega t + F_B \sin \omega t$$

ossia $F_B = 0$ e

$$F_A = \left(2k_2 - m_2 \omega^2\right) A$$

Sostituendo il valore di ω determinato nella risposta alla Domanda 8 troviamo $(m_1 = m_2)$

$$\begin{aligned} F_A &= \left[2k_2 - m_2 \left(\frac{k_1 + 2k_2}{m_1}\right)\right] A \\ &= -k_1 A = -0.837 \mathrm{Nm}^{-1} \times 0.1\mathrm{m} = -0.0837\mathrm{N} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la F.