8.6. 8 maggio 2015

1. Si consideri una macchina termica reversibile che utilizza una mole di gas ideale monoatomico. Inizialmente il *sistema* termodinamico costituito dal gas si trova nello stato iniziale A, con volume $V_A = 20.0$ dm^3 e pressione $P_A = 10^5$ Pa. A partire dallo stato A il sistema effettua un riscaldamento isocoro che lo porta nello stato B, con pressione $P_B = 4P_A$. Successivamente il sistema effettua un'espansione fino al volume $V_C = 2V_A$, che lo porta nello stato C, con la stessa pressione iniziale P_A. Durante tutto il corso dell'espansione si fa in modo che le variazioni (negative) di pressione siano proporzionali alle variazioni di volume. Infine il sistema ritorna allo stato A mediante una compressione isobara. Per fissare i segni, si definiscano il calore Q e il lavoro L scambiati come, rispettivamente, il calore assorbito dal sistema e il lavoro fatto dal sistema. Determinare il lavoro L, in kJ, fatto in un ciclo.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.20}$ C $\boxed{3.00}$ D $\boxed{4.80}$ E $\boxed{6.60}$ F $\boxed{8.40}$

2. Nel caso del problema precedente 1., determinare la variazione di energia interna del sistema termodinamico, in kJ, durante la fase di espansione (da B a C).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-2.40}$ C $\boxed{-4.20}$ D $\boxed{-6.00}$ E $\boxed{-7.80}$ F $\boxed{-9.60}$

3. Nel caso del problema 1., determinare il calore scambiato Q, in kJ, durante la fase di compressione (da C a A).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-1.40}$ C $\boxed{-3.20}$ D $\boxed{-5.00}$ E $\boxed{-6.80}$ F $\boxed{-8.60}$

4. Nel caso del problema 1., determinare la differenza $Q - L$, in joule, tra calore e lavoro scambiati complessivamente durante un intero ciclo.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{222}$ C $\boxed{402}$ D $\boxed{582}$ E $\boxed{762}$ F $\boxed{942}$

5. Durante lo studio di un *ipotetico* gas si stabiliscono i seguenti fatti:

   a) L'equazione di stato è ben descritta dall'espressione $PV^2 = nRV_0T$, dove la costante $V_0 = 30.0$ dm^3 ha le dimensioni di un volume e gli altri simboli hanno il significato ovvio.

   b) Il calore molare a volume costante, misurato per $V = 45.8$ dm^3, dipende dalla temperatura secondo la legge $C_v = RT/T_0$, dove la costante $T_0 = 126$ K ha le dimensioni di una temperatura.

   c) L'espansione (adiabatica) nel vuoto avviene senza variazioni di temperatura.

   Determinare la temperatura finale, in kelvin, di una mole di gas dopo una trasformazione reversibile isocora a partire da uno stato iniziale A con $V = 45.8$ dm^3 e $T = 214$ K, nella quale viene ceduta al gas una quantità di calore di 17.3 kJ.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{215}$ C $\boxed{395}$ D $\boxed{575}$ E $\boxed{755}$ F $\boxed{935}$

6. Per il gas del problema precedente 5., si desidera esprimere l'energia interna U mediante una opportuna funzione f. Quale delle seguenti espressioni è corretta?

   A: $U = f(PV^2)$

   B: $U = f(P^2V)$

   C: $U = f(V)$

   D: $U = f(PV)$

   E: Nessuna

   F: $U = f(P)$

A $\boxed{|\quad|}$ B $\boxed{|\quad|}$ C $\boxed{|\quad|}$ D $\boxed{|\quad|}$ E $\boxed{|\quad|}$ F $\boxed{|\quad|}$

7. Per una mole di gas del problema 5., determinare il lavoro, in kJ, che esso compie in un'espansione isoterma reversibile che parta dallo stato iniziale A e si concluda con un volume triplo (stato B).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.237}$ C $\boxed{0.417}$ D $\boxed{0.597}$ E $\boxed{0.777}$ F $\boxed{0.957}$

8. Per una mole di gas del problema 5., determinare il lavoro, in kJ, che esso compie in un'espansione adiabatica reversibile che parta dallo stato iniziale A e si concluda con una temperatura dimezzata (stato D).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.13}$ C $\boxed{2.93}$ D $\boxed{4.73}$ E $\boxed{6.53}$ F $\boxed{8.33}$

9. Per il gas del problema 5., si desidera esprimere il rapporto $\gamma = C_p/C_v$, tra calore molare a pressione costante e calore molare a volume costante, mediante una opportuna funzione g. Quale delle seguenti espressioni è corretta?

   A: Nessuna

   B: $\gamma = g(VT)$

   C: $\gamma = g(P)$

   D: $\gamma = g(T)$

   E: $\gamma = g(PT)$

   F: $\gamma = g(V)$

A $\boxed{|\quad|}$ B $\boxed{|\quad|}$ C $\boxed{|\quad|}$ D $\boxed{|\quad|}$ E $\boxed{|\quad|}$ F $\boxed{|\quad|}$

10. Per il gas del problema 5., determinare il rendimento del motore termico ottenuto con il seguente ciclo reversibile: la prima trasformazione coincide con quella da A a B del problema 7., la seconda trasformazione è un'espansione adiabatica reversibile da B a C che si arresta quando la temperatura coincide con quella dello stato D del problema 8., la terza trasformazione è una compressione isoterma da C a D e la quarta ed ultima trasformazione è una compressione adiabatica da D a A (trasformazione inversa di quella del problema 8.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.140}$ C $\boxed{0.320}$ D $\boxed{0.500}$ E $\boxed{0.680}$ F $\boxed{0.860}$

Soluzione

Domanda 1

Il grafico del ciclo nel piano (P, V) è un triangolo e il lavoro è dato dall'area del triangolo:

$$L_{\text{ciclo}} = \frac{1}{2}\left(P_B - P_A\right)\left(V_C - V_A\right) = \frac{3}{2} P_A V_A$$

Numericamente

$$L_{\text{ciclo}} = 1.5 \times 10^5 \times 20.0 \times 10^{-3} \text{J} = 3.0 \text{kJ}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

Dall'equazione di stato dei gas ideali, la temperatura iniziale vale

$$T_B = \frac{P_B V_B}{R} = 4 \frac{P_A V_A}{R}$$

la temperatura finale vale

$$T_C = \frac{P_C V_C}{R} = 2 \frac{P_A V_A}{R}$$

e, dall'espressione dell'energia per una mole di gas ideale monoatomico, si ricava la variazione di energia interna:

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} R \left(T_C - T_B\right) = -3 P_A V_A$$

Numericamente

$$\Delta U_{BC} = -2 L_{\text{ciclo}} = -6.0 \text{kJ}$$

e la risposta corretta è dunque la D.

Domanda 3

La temperatura finale vale

$$T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

e, dall'espressione del calore molare a pressione costante per un gas ideale monoatomico, si ottiene:

$$Q = C_P \left(T_A - T_C\right) = -\frac{5}{2} P_A V_A$$

Numericamente

$$Q = -\frac{5}{3} L_{\text{ciclo}} = -5.0 \text{kJ}$$

e la risposta corretta è dunque la D.

Domanda 4

Poiché il sistema termodinamico compie un ciclo, la sua variazione di energia interna ΔU è nulla. Dal primo principio segue:

$$Q - L = \Delta U = 0$$

La risposta corretta è dunque la A.

Domanda 5

Detti F lo stato finale e Q_{AF} il calore scambiato durante la trasformazione, dalla definizione di C_v si ha:

$$Q_{\mathrm{AF}} = \int_{T_A}^{T_F} C_v dT = \int_{T_A}^{T_F} \frac{RT}{T_0} dT = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}\left({T_F}^2 - {T_A}^2\right)$$

da cui:

$$T_F = \sqrt{\frac{2T_0 Q_{\mathrm{AF}}}{R} + {T_A}^2}$$

Numericamente $T_F \simeq 755$ quindi la risposta corretta è la E.

Domanda 6

Poiché l'energia interna scritta in funzione di T e V non varia col volume (proprietà c), si può scrivere $U = f(T)$ e, dall'equazione di stato, segue

$$U = f\left(PV^2\right)$$

cioè la risposta A.

Domanda 7

Dall'espressione del lavoro

$$L_{\mathrm{AB}} = \int_{V_A}^{V_B} P(V) dV$$

tenendo conto della forma dell'isoterma data dall'equazione di stato $P = RT_A/V^2$, si ha:

$$L_{\mathrm{AB}} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{RV_0 T_A}{V^2} dV = -RV_0 T_A \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right) = \frac{2}{3} R \frac{V_0}{V_A} T_A$$

Numericamente $L_{AB} \simeq 0.777\mathrm{kJ}$, quindi la risposta corretta è la E.

Domanda 8

Dal primo principio e dalla soluzione del problema (2), chiamando T (invece di T_F) la temperatura di un generico stato finale raggiunto dall'isocora, si ha:

$$\Delta \mathrm{U} = Q = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}\left(T^2 - {T_A}^2\right)$$

da cui è immediato ricavare una possibile espressione per la $f(T)$ del problema (6):

$$U = f(T) = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}T^2$$

Infine, per l'adiabatica in oggetto, si ha:

$$L_{\mathrm{AD}} = -\Delta \mathrm{U} = -\left(f\left(T_D\right) - f\left(T_A\right)\right) = \frac{3}{8}\frac{R{T_A}^2}{T_0}$$

Numericamente $L_{\mathrm{AD}} \simeq 1.133\mathrm{kJ}$ e quindi la risposta corretta è la B.

Domanda 9

Dalla definizione:

$$C_p = \left(\frac{\delta \mathrm{Q}}{dT}\right)_p = \left(\frac{\delta \mathrm{L} + dU}{dT}\right)_p = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$$

La prima derivata si ottiene dall'equazione di stato, la seconda, poiché $U = f(T)$, coincide con $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = C_v$; pertanto:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{RV_0T}{P}} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{RV_0}{2VP} \\ C_p &= \frac{RV_0}{2V} + C_v \end{aligned}$$

Infine:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{RV_0}{2VC_v} = 1 + \frac{V_0T_0}{2VT} = g\left(V\,T\right)$$

cioè la risposta B.

Domanda 10

Si tratta semplicemente di un ciclo di Carnot condotto fra le temperature T_A e T_D, pertanto l'efficienza vale

$$\eta = 1 - \frac{T_D}{T_A} = \frac{1}{2}$$

cioè la risposta C.