8.8. 5 maggio 2017

Informazioni preliminari.

1. Due corpi hanno capacità termiche della forma $C_1 = \alpha$ e $C_2 = \beta\Theta$ dove α e β sono costanti opportunamente dimensionate e Θ è la temperatura. Si mettono in contatto i due corpi che si trovano alle temperature iniziali Θ_1 e Θ_2 e si misura la temperatura di equilibrio, trovando Θ_f. Quale è il valore del rapporto β/α?
   A B C D E F

2. In un recipiente è posto un corpo di capacità termica C ad una temperatura Θ_i. Quanti grammi di acqua ad una temperatura Θ_0 si devono aggiungere per ottenere all'equilibrio una temperatura Θ_f?
   A B C D E F

3. In una trasformazione termodinamica quasistatica una mole di un gas perfetto raddoppia il suo volume. La pressione finale è uguale alla pressione iniziale P. Sapendo che la pressione massima raggiunta durante la trasformazione è il doppio di quella iniziale, quale delle seguenti affermazioni a proposito del lavoro totale compiuto dal gas durante la trasformazione è vera:
   A: È sicuramente negativo.
   B: È sicuramente positivo.
   C: Può essere arbitrariamente grande.
   D: Vale $P\Delta V$
   E: È sicuramente minore di $2P\Delta V$
   F: Vale $2P\Delta V$
   A B C D E F

4. Tre sbarre della stessa sezione $S =$ e lunghezza $\ell =$ sono saldate tra loro in modo da ottenerne una sola di lunghezza 3ℓ. Se le conducibilità termica dei materiali delle tre sbarre è σ_1, σ_2 e σ_3 la resistenza termica finale vale
   A B C D E F

5. Due corpi hanno capacità termiche $C_1 =$ e $C_2 =$. Si trovano *inizialmente* a una certa differenza di temperatura $\Delta\Theta_0$, e vengono posti in contatto termico mediante una opportuna sbarra di capacità termica trascurabile. Si osserva che la differenza di temperatura si riduce a e^{-1} volte il valore iniziale in un tempo τ. Si ripete l'esperimento sostituendo il primo corpo con uno di capacità termica C_1' e si verifica che il tempo τ si dimezza. Quanto vale C_1'?
   A B C D E F

6. La corda di una chitarra viene mantenuta ad una tensione τ e se sollecitata produce un suono ad una frequenza di $f = 442\text{Hz}$ (più armoniche). Per quale variazione $\Delta\tau$ della tensione il suono viene prodotto alla frequenza $f' = 440\text{Hz}$?
   A B C D E F

7. Ai due lati opposti di un recipiente molto grande contenente un liquido di densità ρ sono praticati due piccoli fori di sezione S, ad un livello rispettivamente h_1 (foro a sinistra) e h_2 (foro a destra) sotto la superficie libera. Il recipiente è appoggiato ad un piano orizzontale privo di attrito. Quale forza esterna orizzontale è necessario applicare al sistema per mantenerlo in quiete? Si consideri un sistema di riferimento con un asse orizzontale orientato da sinistra a destra.
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

8. Un corpo di densità ρ è introdotto in un recipiente contenente un liquido di densità $\rho_L > \rho$. All'equilibrio il rapporto tra il volume al di sotto della superficie e quello totale vale
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

9. Considerando n moli di un gas perfetto, per quale valore della costante a la quantità $VT^a \delta Q$ è un differenziale esatto?
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

Soluzione

Domanda 1

Il sistema dei due corpi non scambia calore con l'esterno, quindi detti Q_1 e Q_2 i calori assorbiti da ciascuno deve essere $Q_1 + Q_2 = 0$. Dato che

$$Q_1 = \int_{\Theta_1}^{\Theta_f} \alpha d\Theta = \alpha \left(\Theta_f - \Theta_1\right)$$
$$Q_2 = \int_{\Theta_2}^{\Theta_f} \beta \Theta d\Theta = \frac{1}{2}\beta \left(\Theta_f^2 - \Theta_2^2\right)$$

troviamo

$$\alpha \left(\Theta_f - \Theta_1\right) + \frac{1}{2}\beta \left(\Theta_f^2 - \Theta_2^2\right) = 0$$

e quindi

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\alpha \frac{\Theta_1 - \Theta_f}{\Theta_f^2 - \Theta_2^2}$$

Domanda 2

La temperatura finale è data da

$$\Theta_f = \frac{C\Theta_i + mc_{H_2O}\Theta_0}{C + mc_{H_2O}}$$

dove c_{H_2O} è il calore specifico per unità di massa dell'acqua. Si ottiene quindi

$$m = \frac{C\left(\Theta_f - \Theta_i\right)}{c_{H_2O}\left(\Theta_0 - \Theta_f\right)}$$

Domanda 3

Il lavoro può essere arbitrariamente grande. Basta considerare una trasformazione che porta dallo stato iniziale a quello finale, seguito da un numero qualsiasi di cicli fatti in modo da rispettare i vincoli e con lavoro fatto dal gas positivo.

Domanda 4

Le tre resistenze sono in serie, quindi

$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= \frac{\ell}{S}\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}\right) \end{aligned}$$

Domanda 5

La differenza di temperatura tra i due corpi segue la legge

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

dove R è la resistenza termica della sbarra e C la capacità termica ridotta del sistema

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Quindi

$$\tau = RC$$

Sostituendo il primo corpo abbiamo

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{RC'}{RC} = \frac{C_1' C_2}{C_1' + C_2} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{2}$$

Di conseguenza

$$C_1' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + 2C_2}$$

Domanda 6

La frequenza di oscillazione dipende dalla radice quadrata della tensione. Quindu i

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{\tau'}{\tau}}$$

da cui

$$\tau' - \tau = \tau \left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 1\right]$$

Domanda 7

Applicando il teorema di Bernoulli si trova che la velocità di uscita dal foro è

$$v = \sqrt{2gh}$$

Consideriamo ad un certo istante il recipiente e il liquido in esso ancora contenuto. La variazione della quantità di moto orizzontale di questo sistema nel tempo Δt, se il recipiente rimane in quiete, è

$$\Delta P = -\left(\rho v_1 S\right) \Delta t \, v_1 + \left(\rho v_2 S\right) \Delta t \, v_2$$

quindi

$$\frac{dP}{dt} = \rho S \left(v_2^2 - v_1^2\right) = 2\rho g S \left(h_2 - h_1\right)$$

Questa è la forza applicata.

Domanda 8

All'equilibrio la spinta di Archimede deve equilibrare la forza peso, dunque

$$\rho V g = \rho_L V_i g$$

dove V è il volume totale e V_i quello immerso. Quindi

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho}{\rho_L}$$

Domanda 9

Abbiamo

$$V T^a \delta Q = n V T^a c_V dT + n V T^a P dV$$

Se si tratta di un differenziale esatto, consideranto T e V come variabili indipendenti deve essere

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[n V T^a P\right] = \frac{\partial}{\partial V}\left[n c_V V T^a\right]$$

Cioè

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\left[n V T^a \frac{nRT}{V}\right] &= \frac{\partial}{\partial V}\left[n c_V V T^a\right] \\
R \frac{\partial}{\partial T}\left[T^{a+1}\right] &= T^a c_V \frac{\partial}{\partial V}\left[V\right] \\
R\left(a+1\right) T^a &= T^a c_V
\end{aligned}$$

In conclusione

$$a = \frac{c_V}{R} - 1$$