PROBLEMA 1.2

Studio sperimentale del periodo del pendolo ⋆

Per studiare sperimentalmente la dipendenza del periodo del pendolo dai suoi parametri si fanno 50 diversi misure, variando le caratteristiche del pendolo e la sua velocità iniziale. Il pendolo viene sempre lanciato dalla posizione verticale.

Le misure sono riportate nella tabella posta di seguito (che per convenienza è possibile scaricare in formato ASCII all'indirizzo `http://www.df.unipi.it/~cella/ueg/PENDOLO.dat`).

Si chiede di

- Rappresentare in un grafico il periodo T in funzione di $\sqrt{\ell/g}$
- Trovare due combinazioni adimensionali indipendenti di T, g, v_0, ℓ e m e rappresentare la prima in funzione della seconda su un grafico.
- Commentare il risultato dei due grafici precedenti. Dire in particolare se quanto ottenuto ha qualche relazione con la funzione $f(x)$ definita nell'Esercizio 1.1.
- In alcuni dei casi considerati il pendolo stava compiendo "piccole" oscillazioni? Come sarebbe possibile dare una risposta quantitativa?

# misura	v_0 (ms^{-1})	ℓ (m)	m (kg)	T (s)
1	0.10	6.72	2.28	5.22
2	0.21	1.42	8.84	2.41
3	0.95	9.37	8.69	6.23
4	1.10	6.10	6.81	5.05
5	1.72	9.06	8.68	6.19
6	2.09	9.03	0.48	6.22
7	1.29	2.33	8.07	3.18
8	1.67	3.61	5.79	3.96
9	2.11	3.52	6.92	3.96
10	3.57	9.5	2.09	6.51
11	2.86	4.54	4.33	4.54
12	4.30	9.44	4.79	6.57
13	5.11	9.98	9.62	6.83
14	4.82	8.67	5.36	6.37
15	4.91	6.87	1.41	5.74
16	5.30	7.14	6.05	5.89
17	3.77	3.17	4.79	3.96
Pl	6.84	9.52	9.89	6.89
19	6.43	7.76	3.26	6.26
20	4.04	2.69	9.66	3.72

21	7.54	8.71	0.55	6.73
22	3.02	1.23	1.15	2.56
23	8.00	7.84	7.04	6.51
24	5.46	3.52	6.44	4.68
25	9.39	9.12	2.27	7.15
26	7.49	5.63	6.15	5.64
27	7.15	4.72	6.76	5.21
28	9.10	6.78	9.49	6.35
29	9.35	7.08	8.76	6.50
30	8.95	5.84	7.95	6.00
31	8.17	4.58	8.60	5.37
32	9.83	6.12	3.74	6.29
33	5.48	1.82	9.53	3.46
34	6.97	2.29	1.17	4.30
35	9.49	4.86	2.52	5.80
36	9.30	5.05	7.35	5.99
37	4.98	1.19	1.14	2.96
38	2.60	0.31	9.42	1.53
39	8.16	2.82	7.47	4.74
40	6.11	1.51	1.71	3.53
41	8.99	3.10	6.35	5.17
42	9.80	3.62	7.35	5.63
43	5.94	1.25	5.67	3.41
44	6.70	1.49	1.80	3.87
45	8.73	2.50	0.29	5.06
46	4.59	0.65	2.54	2.71
47	7.94	1.85	2.13	4.81
48	8.47	2.05	3.09	5.24
49	7.47	1.49	6.25	5.14
50	6.28	1.04	9.55	4.50

Soluzione

Il periodo T misurato è rappresentato in funzione del valore di $\sqrt{\ell/g}$ in Figura 1.1.

Per il secondo grafico richiesto una possibile scelta di parametri adimensionali indipendenti è

$$\begin{aligned} \Pi &= T\sqrt{\frac{g}{\ell}} \\ \Pi_1 &= \frac{v_0}{\sqrt{\ell g}} \end{aligned}$$

e il valore di Π ricavato dai dati è rappresentato in funzione di Π_1 in Figura 1.2.

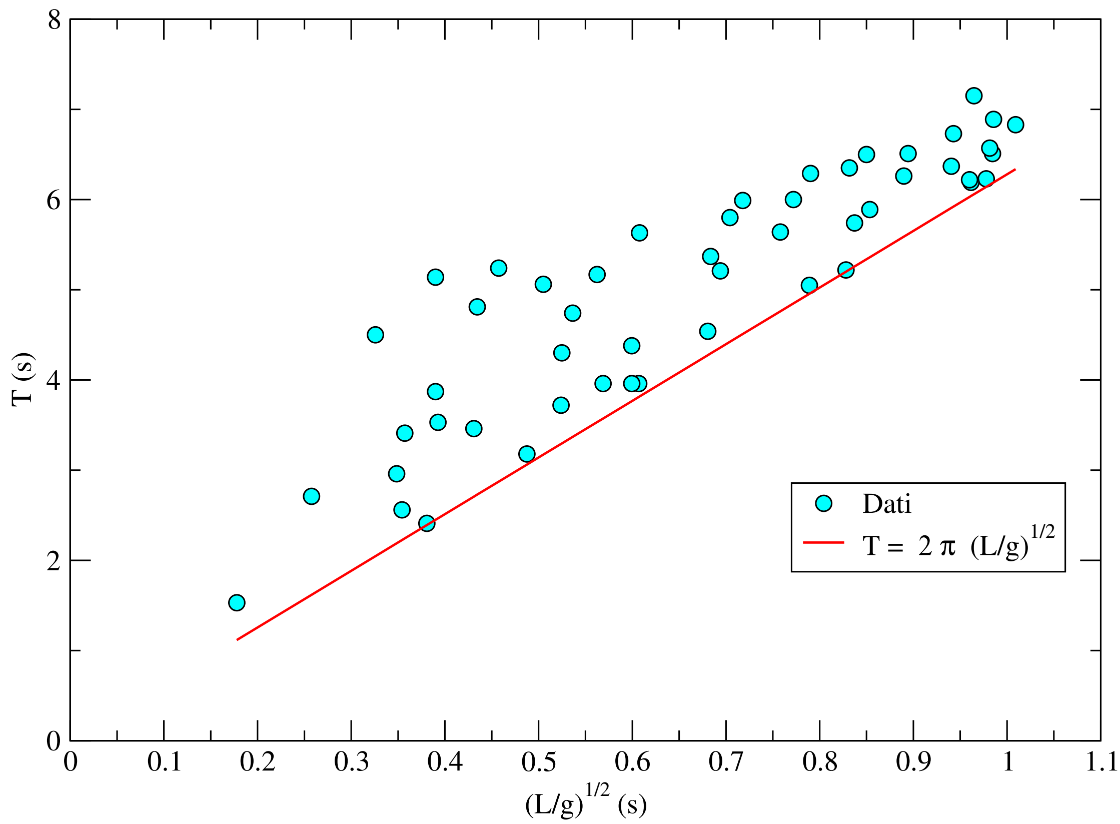

Figura 1.1.: I periodi T_i in funzione di $\sqrt{\ell_i/g}$ per i dati in tabella (cerchi). Per confronto, è riportata la retta $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

La combinazione Π_1 è il periodo misurato in unità $\sqrt{\ell/g}$, invece Π_1 è la velocità misurata in unità $\sqrt{g\ell}$.

Osservando i due grafici si nota che nel primo (Figura 1.1) i dati non si dispongono su un'unica curva, cosa che accade per il secondo (Figura 1.2).

La ragione di questo è che, come è possibile vedere studiando il moto del pendolo (o come possiamo dedurre dall'analisi dimensionale condotta nell'Esercizio 1.1), il periodo è proporzionale a $\sqrt{\ell/g}$ solo per piccole oscillazioni. In quel particolare regime si può dimostrare che vale la legge

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.2.1}$$

rappresentata in Figura 1.1 dalla retta rossa. Come si vede alcuni dati corrispondono alla (1.2.1), negli altri casi il periodo è sistematicamente maggiore.

Nel secondo grafico vediamo che i dati si allineano apparentemente su una curva ben definita. In effetti l'analisi dimensionale ci dice che per i parametri adimensionali che

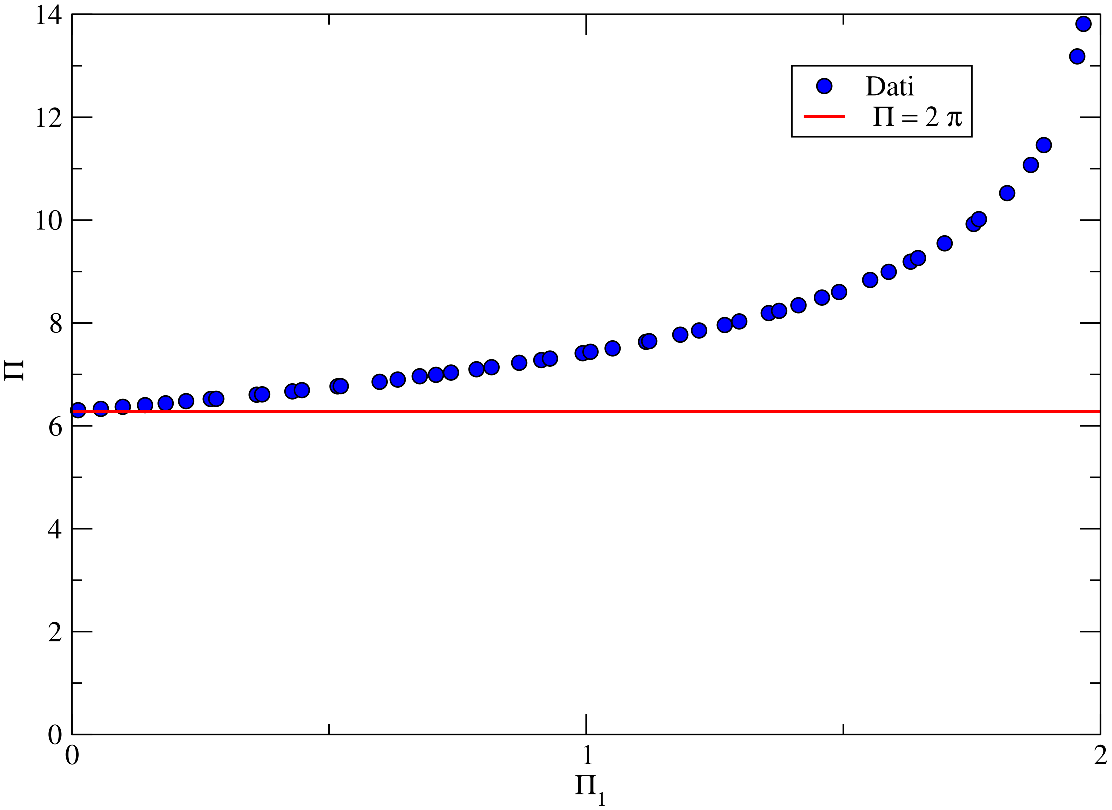

Figura 1.2.: Il valori Π_i ricavati dai dati in tabella in funzione dei valori Π_{1i}. Per confronto è riportata in rosso la costante 2π.

abbiamo scelto deve valere (vedere l'Equazione (1.1.2))

$$\Pi = f\left(\Pi_1^2\right)$$

e quindi abbiamo rappresentato nel grafico la funzione $y = f(x^2)$. Nel limite $\Pi_1 \to 0$ che corrisponde alle piccole oscillazioni vediamo che

$$\lim_{\Pi_1 \to 0} f\left(\Pi_1^2\right) = 2\pi$$

in accordo con le considerazioni precedenti. Per quantificare tutto questo basta osservare dal grafico in Figura 1.2 che il valore di Π si allontana da 2π all'aumentare di Π_1.